



# УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ



## ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

I

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ОРДЕНА ЛЕНИНА УНИВЕРСИТЕТА  
ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА  
ЛЕНИНГРАД  
1951

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ЛЕНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ОРДЕНА ЛЕНИНА  
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА

№ 149

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

---

*СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК*

---

Выпуск 24

---

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

I

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ЛЕНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ОРДЕНА ЛЕНИНА УНИВЕРСИТЕТА  
ИМЕНИ А. А. ЖДАНОВА  
ЛЕНИНГРАД  
1951

Настоящий номер Ученых Записок является первым из серии номеров, посвященных динамическим задачам теории упругости, решенным за последние годы в стенах Ленинградского университета. Все статьи, помещаемые в этих номерах, связаны общностью методов построения решений задач, а также — методов исследования решений, предпринимаемых с целью получения физических следствий. Основой всех исследований является метод неполного разделения переменных, зародившийся и разработанный в нашем Университете. Упомянутый метод позволил существенно упростить решения многих, рассмотренных ранее другими авторами, задач, а также позволил построить и произвести исследование решений ряда новых задач, которые ранее не удавалось решить удовлетворительным образом.

Ответственный редактор

проф. С. Г. МИХЛИН

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

*К. И. Огурцов, Г. И. Петрашень*

1. Задачи на колебания упругого полупространства и плоского упругого слоя ставились еще Лэмбом<sup>[1,2]</sup>. Лэмбу удалось построить решения некоторых задач для полупространства в виде интегралов Фурье. Но в процессе вычислений интегралы у Лэмба иногда оказывались расходящимися и, следовательно, не давали надежного обоснования полученных результатов. Строгое и полное решение задач для упругого полупространства стало возможным лишь благодаря работе В. И. Смирнова и С. Л. Соболева<sup>[3]</sup>. Метод, предложенный упомянутыми авторами (и названный методом функционально-инвариантных решений), явился основой большого числа других исследований по динамической теории упругости в случае слоистых сред. Из таких полезно назвать работы И. Н. Векуа<sup>[4]</sup> и Н. В. Зволинского<sup>[5]</sup>, в которых изучались возмущения, вызванные действием точечного источника в случае упругого слоя и в случае слоя жидкости, лежащего на упругом полупространстве.

Нужно отметить, что эти работы и большинство других для точечных источников возмущений относились к плоской динамической задаче теории упругости. Что же касается задач с осевой симметрией, то здесь прежде всего следует отметить фундаментальную работу В. И. Смирнова и С. Л. Соболева<sup>[6]</sup>, в которой авторы обобщили метод функционально инвариантных решений на случай задач для осевой симметрии и в качестве примера построили решение задачи Лэмба для полупространства. Кроме того, следует отметить работу В. И. Смирнова<sup>[7]</sup>, в которой на основе того же метода развивалась строгая теория точечных источ-

ников в бесконечной среде, и работу Е. А. Нарышкиной<sup>[8]</sup>, посвященную изучению поверхностных волн в полупространстве на больших расстояниях и при больших значениях времени.

Следует упомянуть о том, что подробные качественные исследования решений задач для осевой симметрии еще не производились. Это обстоятельство являлось, повидимому, следствием громоздкости формы окончательных результатов, полученных методом функционально инвариантных решений. Упомянутый метод позволял сравнительно простыми средствами строить точные решения динамических задач теории упругости для областей с плоско-параллельными границами. Что же касается исследования этих решений (с целью получения физических следствий), то здесь приходилось встречаться с большими трудностями.

Значительную долю этих трудностей удается преодолеть, если воспользоваться методом неполного разделения переменных, предложенным впервые в 1937 г. акад. В. И. Смирновым и значительно продвинутом одним из соавторов настоящего исследования в работах о распространении упругих волн в слоисто-изотропных средах<sup>[9, 12]</sup>. Применением метода неполного разделения переменных, а также методов комплексного интегрирования, можно получить новое представление решений задач теории упругости (в случае слоистых сред) в форме некоторых двукратных интегралов. При этом оказывается, что метод неполного разделения переменных по сравнению с другими, известными в настоящее время, методами обладает преимуществами в том смысле, что он не только позволяет элементарным путем получать все результаты, даваемые другими способами, применявшимися ранее, но дает и другие формулы для искомых решений, непосредственное исследование которых часто оказывается значительно более простым. Кроме того, само построение решений всех задач о колебании областей с параллельными граничными плоскостями оказывается единообразным и приводит к значительно менее трудоемким вычислениям. Преимущество нового метода заключается еще и в том, что он допускает простое обобщение на случай некоторых областей с неплоскими границами (цилиндр, сфера и т. п.)<sup>[13, 14]</sup>.

Уже упоминалось о том, что окончательная форма решения задач для осевой симметрии в случае слоистых сред, даваемая методом функционально инвариантных решений, не позволяла получать глубоких физических следствий. По-

этому представлялось естественным попытаться получить необходимые физические следствия при помощи метода неполного разделения переменных. Этому вопросу посвящена диссертация К. И. Огурцова, выполненная под руководством Г. И. Петрашень; указанная диссертация послужила основой для настоящей статьи.

2. В предлагаемой работе решаются методом неполного разделения переменных динамические задачи для упругого полупространства при наличии осевой симметрии и производится исследование построенных решений. При этом преследуются три следующие основные цели:

Во-первых, получение данных, относящихся к классической схеме исследования задач. Для этого производятся исследования построенных решений при больших значениях времени (в фиксированных точках полупространства, а также с точки зрения движущегося наблюдателя) и выделяются из возмущений главные части.

Во-вторых, получение данных, имеющих отношение к сейсморазведке. Для этой цели производится исследование высокочастотной части упругих возмущений, а также устанавливаются законы распространения резких неоднородностей поля смещений.

И, наконец, в-третьих, ставится задачей получение данных, относящихся к вопросу о местных напряжениях в упругой среде и к вопросу о динамическом сопротивлении. Для продвижения в таком направлении, как известно, необходимо уметь вычислять с достаточной степенью точности смещения и напряжения поля вблизи точки приложения воздействия. В настоящей работе как раз и указываются методы проведения упомянутых вычислений. Сами же вычисления, несмотря на их сравнительную простоту, пока еще нами не производились.

Предлагаемая работа разделена на три главы. Первая глава, посвященная построению точных решений задач, написана Г. И. Петрашень по материалам диссертации К. И. Огурцова. Вторая глава, принадлежащая К. И. Огурцову и посвященная общему исследованию построенных решений, в переработанном и сокращенном виде взята из упомянутой диссертации. И, наконец, последняя глава работы, написанная Г. И. Петрашень, посвящена асимптотическим методам исследования построенных решений, которые уже частично излагались<sup>[9]</sup>.

## ГЛАВА I

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ  
ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В настоящей главе дается строгое решение динамических задач для упругого полупространства  $z \geq 0$  при условии, что при  $t \leq 0$  в полупространстве царил покой, а в момент  $t = 0$  начинает действовать некоторый источник упругих возмущений. Решение задач строится по методу неполного разделения переменных, который легко приводит к окончательным результатам, содержащим две последовательные операции интегрирования. Рассматриваются: случаи единичной включенной поверхностной силы и единичного поверхностного импульса, а также случаи внутренних источников колебаний. Во всех случаях сначала предполагается, что воздействие задано некоторыми плавно распределенными в пространстве функциями, содержащими параметр  $n$ , стремление которого к бесконечности обращает воздействие в такое, какое принято называть единичным и пространственно-сосредоточенным. Затем уже, в построенных решениях совершается предельный переход  $n \rightarrow \infty$ , законность которого в этой работе предполагается известной<sup>[9]</sup>. Кроме указанного, во всем нижеследующем предполагается, что уже совершен переход к безразмерным независимым переменным, а также к безразмерным функциям и упругим постоянным. Поэтому мы сможем в дальнейшем не интересоваться размерностью элементов, являющихся составными частями тех или иных формул.

Наконец, заметим, что во всей работе применяется цилиндрическая система координат  $(\rho, \theta, z)$ , ось  $Oz$  которой перпендикулярна свободной границе полупространства.

## § 1

*Колебания полупространства под действием  
единичной включенной нормальной силы и под  
действием единичного нормального импульса*

1. Пусть на свободную границу упругого полупространства  $z \geq 0$ , характеризуемого постоянными  $(\lambda, \mu, \rho_0)$  и находящегося в покое, начинает действовать в момент  $t = 0$  нормальная осесимметрическая сила, распределенная по закону

$$T_\rho = 0; \quad T_z = \frac{n}{2\pi} \cdot \frac{e^{-n\rho}}{\rho} a(t), \quad (1,1)$$

где  $a(t)$  является заданной функцией времени.

Тогда, как известно, потенциалы  $\varphi(\rho, z, t)$  и  $\psi(\rho, z, t)$  поля упругих смещений  $\vec{u}(\rho, z, t)$  в полупространстве  $z \geq 0$ , представляемого формулой

$$\vec{u} = q(\rho, z, t) \vec{\rho}_1 + w(\rho, z, t) \vec{k}_1, \quad (2,1)$$

где

$$q = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\psi}{\rho} \quad (3,1)$$

(а  $\vec{\rho}_1$  и  $\vec{k}_1$  обозначают координатные орты) определяются как решения волновых уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\psi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (4,1)$$

при нулевых начальных данных

$$\varphi \Big|_{t=0} = \psi \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (5,1)$$

и следующих условиях на границе полупространства:

$$\left. \begin{aligned} \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right]_{z=0} &= -T_\rho = 0; \\ \mu \left[ (b^2 - a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{z=0} &= -T_z. \end{aligned} \right\} (6,1)$$

Заметим, что постоянные  $a^2$  и  $b^2$ , входящие в (4,1) и (6,1), определяются формулами

$$a^2 = \frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu}; \quad b^2 = \frac{\rho_0}{\mu} \quad (7,1)$$

и имеют смысл квадратов обратных скоростей продольных и поперечных волн.

Если учесть разложение

$$\frac{n}{2\pi} \cdot \frac{e^{-n\rho}}{\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{nk}{\sqrt{k^2 + n^2}} J_0(k\rho) dk \quad (8,1)$$

и если искать потенциалы в виде интегралов Фурье-Бесселя

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{\infty} X(z, t, k) J_0(k\rho) \frac{n}{k\sqrt{k^2+n^2}} dk; \\ \psi &= \frac{1}{\pi\mu} \int_0^{\infty} Y(z, t, k) J_1(k\rho) \frac{n}{k\sqrt{k^2+n^2}} dk, \end{aligned} \right\} (9,1)$$

то решение задачи (4,1) — (6,1) без труда может быть найдено (9).

При этом оказывается, что в случае единичной включенной силы, т. е. когда функция  $a(t)$  из (1,1) определяется равенствами

$$a(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \geq 0, \end{cases} \quad (10,1)$$

справедливы формулы [9]

$$\left. \begin{aligned} X(z, t, k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(2+\zeta^2) e^k \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \right)}{\zeta R(\zeta)} d\zeta; \\ Y(z, t, k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} e^k \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \right)}{\zeta R(\zeta)} d\zeta, \end{aligned} \right\} (11,1)$$

в которых ветви радикалов фиксированы условиями, что

$$\arg \sqrt{1+\zeta^2} = \arg \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} = 0 \text{ при } \zeta > 0, \quad (12,1)$$

функция  $R(\zeta)$  имеет значение

$$R(\zeta) = (2+\zeta^2)^2 - 4\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}, \quad (12,1)$$

величина  $\gamma$  определяется отношением

$$\gamma = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}, \quad (12,1)$$

а число  $\sigma$  имеет некоторое положительное значение.

В случае же единичного импульса, т. е. когда  $a(t)$  из (1,1) соответствует символу Дирака

$$a(t) = \delta(t), \quad (13,1)$$

функции  $X$  и  $Y$ , входящие под знаки интегралов в (9,1), оказываются следующими:

$$\left. \begin{aligned} X(z, t, k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{k}{b} \cdot \frac{(2 + \zeta^2) e^{\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}}{R(\zeta)} d\zeta; \\ Y(z, t, k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{k}{b} \cdot \frac{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} e^{\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}}{R(\zeta)} d\zeta. \end{aligned} \right\} (14,1)$$

Наконец, следует отметить, что переход к случаю сосредоточенных в точке  $\rho=0$ ,  $z=0$  нормальных воздействий осуществляется предельным переходом, при  $n \rightarrow \infty$ , под знаком интегралов (9,1). В результате выражение

$$\frac{n}{\sqrt{k^2+n^2}}$$

в упомянутых формулах заменяется единицей.

2. При исследовании динамических процессов в упругих средах не всегда бывает целесообразно переходить к случаю сосредоточенных воздействий. Иногда оказывается более выгодным останавливаться на рассмотрении случая, когда воздействие задано в „малой“, но конечной области пространства (так как это может ближе соответствовать условиям, осуществляющимся на практике).

Для того чтобы задать нормальное граничное воздействие „малой“ окрестности начала координат, можно было бы пользоваться формулами (1,1) и считать число  $n$  конечным и весьма большим. Но при этом получается некоторое формальное неудобство, заключающееся в том, что зависимость от числа  $k$  подинтегральных функций в (9,1) оказывается сравнительно сложной. Для некоторых же вычислений было бы гораздо удобнее, если бы функция (15,1) в (9,1) заменилась, например, функцией вида  $e^{-ak}$ .

Нетрудно видеть, что упомянутого неудобства можно было бы избежать с самого начала, если бы мы выбрали граничное воздействие  $(1_1, 1)$  в виде

$$T_\rho = 0; \quad T_z = \frac{n^2}{2\pi(1+n^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}} a(t). \quad (1_2, 1)$$

Действительно, во-первых, сразу видно, что при  $n \rightarrow \infty$  граничное воздействие  $(1_2, 1)$  становится единичным и сосредоточенным в точке  $\rho = 0$ , так как при  $\rho > 0$  и  $n \rightarrow \infty$  будет  $T_z \rightarrow 0$ , причем всегда справедливо равенство

$$\int_0^\infty \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} T_z \, d\theta = 2\pi \int_0^\infty T_z \rho \, d\rho = a(t).$$

Во-вторых же, на основании сравнения известной формулы

$$\frac{1}{2\pi} \frac{n^2}{(1+n^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) \, dk \quad (8_2, 1)$$

с формулой  $(8_1, 1)$  сразу видно, что решение задачи  $(4, 1)$ — $(6, 1)$ , соответствующее воздействию  $(1_2, 1)$ , представляется уже не формулами  $(9, 1)$ , а интегралами

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty X(z, t, k) J_0(k\rho) \frac{e^{-\frac{k}{n}}}{k} \, dk; \\ \psi &= \frac{1}{\pi\mu} \int_0^\infty Y(z, t, k) J_1(k\rho) \frac{e^{-\frac{k}{n}}}{k} \, dk, \end{aligned} \right\} (16, 1)$$

в которых функции  $X(z, t, k)$  и  $Y(z, t, k)$  имеют в точности прежние же значения.

Учитывая упоминавшееся неудобство формул  $(9, 1)$ , будем считать при исследовании решения нашей задачи, что граничное воздействие на полупространство задается в виде  $(1_2, 1)$ . При этом можем утверждать, что в случае единичной включенной силы  $(10, 1)$  потенциалы поля смещений представляются формулами  $(16, 1)$  и  $(11, 1)$ , а в случае мгновенного импульса  $(13, 1)$  упомянутые потенциалы определяются по  $(16, 1)$  и  $(14, 1)$ .

Мы не будем останавливаться на доказательстве того, что наши решения (рассматриваемых задач для упругого полупространства) являются строго обоснованными в математическом отношении. Подчеркнем, однако, что такое доказательство могло бы быть выполнено без затруднений<sup>[9]</sup>.

3. Как уже указывалось<sup>[9]</sup>, удобство метода неполного разделения заключается и в том, что представление решения двойными интегралами, например (16,1) и (11,1), позволяет естественным образом переходить к другим формам решений, применение которых может оказаться полезным в тех или иных специальных случаях.

Для понимания второй главы нашей работы представляется полезным уже сейчас остановиться коротко на упомянутом вопросе. Мы это и сделаем, причем начнем со случая единичной включенной силы (10,1).

Если подставить значения потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$  из (16,1) и (11,1) в формулы (3,1) для компонент вектора упругих смещений в полупространстве, то легко получают представления

$$\begin{aligned}
 q(\rho, z, t) &= \frac{1}{4\pi^2\mu i} \int_0^\infty J_1(k\rho) \left\{ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{(2+\zeta^2) e^{-k(z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} - \frac{t}{b}\zeta + \frac{1}{n})}}{\zeta R(\zeta)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} e^{-k(z\sqrt{1+\zeta^2} - \frac{t}{b}\zeta + \frac{1}{n})}}{\zeta R(\zeta)} \right] d\zeta \right\} dk, \\
 \omega(\rho, z, t) &= \\
 &= \frac{1}{4\pi^2\mu i} \int_0^\infty J_0(k\rho) \left\{ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{(2+\zeta^2)\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} e^{-k(z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} - \frac{t}{b}\zeta + \frac{1}{n})}}{\zeta R(\zeta)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} e^{-k(z\sqrt{1+\zeta^2} - \frac{t}{b}\zeta + \frac{1}{n})}}{\zeta R(\zeta)} \right] d\zeta \right\} dk,
 \end{aligned}
 \tag{17,1}$$

в которых  $R(\zeta)$  имеет значение из (12<sub>2</sub>,1), а ветви радикалов определены по (12<sub>1</sub>,1).

Исследование смещений  $q$  и  $\omega$  можно производить путем вычисления (или оценки) интегралов Меллина с последующим вычислением (или оценкой) интегралов по параметру  $k$ . Но иногда бывает удобно производить исследование  $q$  и  $\omega$  на основе других представлений правых частей в (17,1).

Чтобы получить упомянутые представления, будем считать  $n < \infty$  и учтем, что при достаточно малом значении  $\sigma > 0$  во всех точках пути интегрирования интегралов Меллина выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{1}{n} \right] \leq -\delta < 0;$$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{1}{n} \right] \leq -\delta < 0,$$

наличие которых позволяет совершить перестановку порядка интегрирования по  $k$  и по  $\zeta$ . Переставляя же порядок интегрирования и выполняя интегрирование по  $k$ , получаем формулы

$$\begin{aligned} q(\rho, z, t) = & \\ = & \frac{1}{4\pi^2 \mu i \rho} \left\{ \int_{(l_1)} \frac{(2 + \zeta^2) \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{1}{n} \right) d\zeta}{\zeta R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \right. \\ & \left. - \int_{(l_2)} \frac{2 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{1}{n} \right) d\zeta}{\zeta R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}; \\ \omega(\rho, z, t) = & \\ = & \frac{1}{4\pi^2 \mu i} \left\{ \int_{(l_1)} \frac{(2 + \zeta^2) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} d\zeta}{\zeta R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}}} - \right. \\ & \left. - \int_{(l_2)} \frac{2 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} d\zeta}{\zeta R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\}, \end{aligned} \quad (18,1)$$

[эквивалентные формулам (17,1)] пути интегрирования  $(l_1)$  и  $(l_2)$  в которых проходят в положительном направлении вблизи мнимой оси в правой полуплоскости.

Следует подчеркнуть, что, как и во всех интегралах от аналитических функций, положение контуров  $(l_1)$  и  $(l_2)$  не

фиксируется однозначным образом. Существенным является лишь то, что эти контуры пересекают вещественную ось по направлению из нижней в верхнюю полуплоскость переменной  $\zeta$  и что они оставляют справа от себя лишь, соответственно, по одному корню следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{1}{n} \pm i \rho &= 0; \\ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{1}{n} \pm i \rho &= 0. \end{aligned} \right\} (19,1)$$

Корни же последних уравнений определяются без труда. При этом оказывается, что если выполняются неравенства (точки позади фронтов)

$$\left. \begin{aligned} \frac{t^2}{b^2} &> \gamma^2 (\rho^2 + z^2); \\ \frac{t^2}{b^2} &> \rho^2 + z^2, \end{aligned} \right\} (20,1)$$

[соответственно, для первых и вторых уравнений (19,1)], то интересующие нас корни определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \zeta_+ &= \frac{\left(\frac{1}{n} \mp i \rho\right) + z \sqrt{\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2 (z^2 + \rho^2) - \gamma^2 \frac{1}{n^2} \mp 2\gamma^2 \frac{\rho}{n} i}}{\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2 z^2}; \\ \zeta_- &= \frac{\left(\frac{1}{n} \mp i \rho\right) + z \sqrt{\frac{t^2}{b^2} - (z^2 + \rho^2) - \frac{1}{n^2} \mp 2\gamma^2 \frac{\rho}{n} i}}{\frac{t^2}{b^2} - z^2}, \end{aligned} \right\} (21,1)$$

в которых (из двойных знаков  $\mp$ ) верхний знак соответствует верхнему же знаку в формулах (19,1), а ветви радикалов определены так, что при  $n = \infty$  радикалы имеют положительные значения.

Если же для первых и вторых уравнений (19,1) выполняются, соответственно, неравенства (точки впереди фронтов)

$$\left. \begin{aligned} \frac{t^2}{b^2} &< \gamma^2 (\rho^2 + z^2); \\ \frac{t^2}{b^2} &< \rho^2 + z^2, \end{aligned} \right\} (22,1)$$

то корни уравнений (19,1) оказываются следующими:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{\left(\frac{1}{n} \mp i\rho\right) \frac{t}{b} \mp iz \sqrt{\gamma^2(\rho^2 + z^2) - \frac{t^2}{b^2} - \gamma^2 \frac{1}{n^2} \pm 2\gamma^2 \frac{\rho}{n} i}}{\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2 z^2}, \\ \zeta_1 &= \frac{\left(\frac{1}{n} \mp i\rho\right) \frac{t}{b} \mp iz \sqrt{\rho^2 + z^2 - \frac{t^2}{b^2} - \frac{1}{n^2} \pm 2\frac{\rho}{n} i}}{\frac{t^2}{b^2} - z^2}, \end{aligned} \right\} (23,1)$$

причем о выборе двойных знаков, а также о выборе ветвей радикалов следует сказать в точности то же, что мы говорили после формул (21,1).

В заключение полезно подчеркнуть, что если на плоскости ( $\zeta$ ) провести разрезы из точек  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$  каким-либо образом в левой полуплоскости, то на полученном листе римановой поверхности не окажется других корней уравнений (19,1). Формулы (18,1) будем применять для получения физических следствий в наших задачах.

В некоторых случаях оказывается более удобным переходить от решений (17,1) не к решениям (18,1), а к решениям в форме метода В. И. Смирнова и С. Л. Соболева. Для осуществления такого перехода следует воспользоваться интегральными представлениями функций Бесселя

$$J_0(k\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\rho \cos \lambda) d\lambda;$$

$$J_1(k\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(k\rho \cos \lambda) \cos \lambda d\lambda,$$

вести обозначение

$$x = \rho \cos \lambda, \quad (24,1)$$

подставить значения  $J_n(k\rho)$  в формулы (17,1) и переставить порядок интегрирования по  $k$  и  $\lambda$ , а также по  $k$  и  $\zeta$ .

Производя указанное изменение порядка интегрирования и выполняя интегрирование по переменной  $k$ , получаем формулы <sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned}
 & q(\rho, z, t) = \\
 & = \frac{1}{2\pi^2\mu} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{(l_1^0)} \frac{(2 + \zeta^2) d\zeta}{\zeta R(\zeta) \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} \right]} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{(l_2^0)} \frac{2 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} d\zeta}{\zeta R(\zeta) \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} \right]} \right\} \cos \lambda d\lambda; \\
 & \quad \quad \quad w(\rho, z, t) = \\
 & = \frac{1}{2\pi^2\mu} \int_0^\pi \left\{ \frac{i}{2\pi} \int_{(l_1^0)} \frac{(2 + \zeta^2) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} d\zeta}{\zeta R(\zeta) \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} \right]} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{i}{2\pi} \int_{(l_2^0)} \frac{2 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} d\zeta}{\zeta R(\zeta) \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} \right]} \right\} d\lambda,
 \end{aligned} \tag{25,1}$$

в которых контуры  $(l_1^0)$  и  $(l_2^0)$  пересекают вещественную ось переменной  $\zeta$  по направлению из нижней в верхнюю полуплоскость и расположены в правой полуплоскости так, что справа от них находится лишь по одному корню, соответственно, следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta_a & \equiv \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} = 0; \\
 \delta_b & \equiv \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} = 0.
 \end{aligned} \right\} \tag{26,1}$$

Уравнения, весьма близкие к уравнениям (26,1), были рассмотрены в работе <sup>[9]</sup>. Там было показано, что интересные нас корни определяются формулами

$$\zeta_a = \frac{\left( \frac{1}{n} - ix \right) \frac{t}{b} + z \sqrt{\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2 (x + z^2) - \gamma^2 \frac{1}{n^2} + 2\gamma^2 \frac{x}{n} i}}{\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2 z^2}, \tag{27,1}$$

$$\zeta_b = \frac{\left(\frac{1}{n} - ix\right) \frac{t}{b} + z \sqrt{\frac{t^2}{b^2} - (x^2 + z^2) - \frac{1}{n^2} + 2 \frac{x}{n} i}}{\frac{t^2}{b^2} - z^2}, \quad (27,1)$$

при следующих условиях выбора ветвей радикалов (которые мы сформулируем только для  $\zeta_a$ ).

Если  $\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2(x^2 + z^2) > 0$ , то радикал

$$\sqrt{\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2(x^2 + z^2) - \gamma^2 \frac{1}{n} + 2\gamma^2 \frac{x}{n} i}$$

принимает положительные значения при  $n = \infty$ .

Если же  $\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2(x^2 + z^2) < 0$ , то при  $n = \infty$  радикал принимает отрицательные мнимые значения.

Как известно из <sup>[9]</sup>, формулы (25,1) допускают дальнейшее преобразование, которое сводится к вычислению комплексных интегралов [распространенных по контурам  $L_v^0$ ] по вычетам в простых полюсах  $\zeta = \zeta_a$  и  $\zeta = \zeta_b$ .

Упомянутые вычисления приводят к окончательным формулам

$$\begin{aligned} q(\rho, z, t) &= \\ &= -\frac{i}{2\pi^2\mu} \int_0^\pi \left\{ \frac{2 + \zeta_a^2}{\zeta_a R(\zeta_a) \delta'_a} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_b^2} \sqrt{1 + \zeta_b^2}}{\zeta_b R(\zeta_b) \delta'_b} \right\} \cos \lambda d\lambda; \\ w(\rho, z, t) &= \\ &= \frac{1}{2\pi^2\mu} \int_0^\pi \left\{ \frac{(2 + \zeta_a^2) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_a^2}}{\zeta_a R(\zeta_a) \delta'_a} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_b^2}}{\zeta_b R(\zeta_b) \delta'_b} \right\} d\lambda, \end{aligned} \quad (28,1)$$

в которых  $\delta'_a$  и  $\delta'_b$  имеют значения

$$\left. \begin{aligned} \delta'_a &= \frac{t}{b} - \frac{\gamma^2 z \zeta_a}{\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_a^2}}; \\ \delta'_b &= \frac{t}{b} - \frac{z \zeta_b}{\sqrt{1 + \zeta_b^2}}, \end{aligned} \right\} (29,1)$$

$\zeta_a$  и  $\zeta_b$  определяются по (27,1), а  $x = \rho \cos \lambda$ .

Как известно, представление решения задачи о полупространстве в виде (28,1) в точности соответствует методу комплексных решений В. И. Смирнова и С. Л. Соболева. Следует отметить, что вследствие сложной зависимости от переменных  $\rho$ ,  $z$  и  $t$  правых частей в (28,1), последние формулы обычно неудобны для получения физических следствий.

4. Обратимся теперь к рассмотрению случая сосредоточенного импульса.

Если подставить значения потенциалов из (16,1) и (14,1) в формулы (3,1) для компонент поля упругих смещений, то получим следующие выражения:

$$q(\rho, z, t) = \frac{1}{4\pi^2 \mu b i} \int_0^\infty \left\{ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(2 + \zeta^2) e^{-k \left( z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{t}{b} \zeta + \frac{1}{n} \right)}}{R(\zeta)} d\zeta - \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} e^{-k \left( z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{t}{b} \zeta + \frac{1}{n} \right)}}{R(\zeta)} d\zeta \right\} \times k J_1(k \rho) dk, \quad (30,1)$$

$$w(\rho, z, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 \mu b i} \int_0^\infty \left\{ \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(2 + \zeta^2) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} e^{-k \left( z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{t}{b} \zeta + \frac{1}{n} \right)}}{R(\zeta)} d\zeta - \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} e^{-k \left( z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{t}{b} \zeta + \frac{1}{n} \right)}}{R(\zeta)} d\zeta \right\} k J_0(k \rho) dk.$$

Так же, как это делалось в (17,1), в предыдущих формулах (при  $n < \infty$ ) можно переставить порядок интегрирования по  $k$  и  $\zeta$  и можно выполнить интегрирование по  $k$ . После интегрирования по  $k$  под знаком интеграла Меллина мы получим выражения для компонент смещения, содержащие лишь однократные операции интегрирования по путям  $(L_1)$  и  $(L_2)$ , входящим в формулы (18,1). Упомянутые выражения оказываются следующими:

$$q = \frac{1}{2\pi\mu b} \left\{ \frac{\rho}{2\pi i} \int_{(L_1)} \frac{(2 + \zeta^2) d\zeta}{R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho}{2\pi i} \int_{(L_2)} \frac{2\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} d\zeta}{R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}; \quad (31,1)$$

$$w = \frac{-1}{2\pi\mu b} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(L_1)} \frac{(2 + \zeta^2) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{1}{n} \right) d\zeta}{R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{(L_2)} \frac{2\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{1}{n} \right) d\zeta}{R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Совершенно так же, как мы получали из формул (17,1) формулы (25,1), можно получить и из формул (30,1) выражения

$$q = \frac{-1}{2\pi^2\mu} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{(L_1^0)} \frac{(2 + \zeta^2) d\zeta}{R(\zeta) \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} \right]^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{(L_2^0)} \frac{2\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} d\zeta}{R(\zeta) \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} \right]^2} \right\} \cos \lambda d\lambda, \quad (32,1)$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi^2\mu} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l_1^0)} \frac{(2 + \zeta^2) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} d\zeta}{R(\zeta) \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} \right]^2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{(l_2^0)} \frac{2\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}{R(\zeta) \left[ \frac{t}{b} \zeta - z \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix - \frac{1}{n} \right]^2} d\lambda, \right\} \quad (32,1)$$

в которых положено  $x = \rho \cos \lambda$ , а контуры  $(l_1^0)$  и  $(l_2^0)$  имеют тот же смысл, что и контуры  $(l_0^0)$  в (25,1).

Основное отличие последних формул от формул (25,1) заключается в том, что подинтегральные функции в них имеют уже в точках  $\zeta_a$  и  $\zeta_b$  полюсы второго порядка. Это, конечно, отражается и на виде формул, которые можно было бы получить из (32,1) путем применения теоремы о вычетах. Получающиеся окончательные формулы, подобные формулам (28,1), оказываются громоздкими и плохо обозримыми. Мы не будем в нижеследующем пользоваться этими формулами, вследствие чего нам представляется излишним приводить для них явные выражения.

В заключение параграфа подчеркнем, что переход к случаю пространственно сосредоточенных граничных воздействий может быть осуществлен в формулах (11,1), (14,1), а также в (17,1), (18,1) и (25,1), путем предельного перехода при  $n \rightarrow \infty$  под знаками интегралов. Что же касается формулы (30,1), то упомянутый переход под знаком интеграла в ней уже не законен. В формулах же (31,1) и (32,1) снова можно переходить к пределу при  $n \rightarrow \infty$  под знаками интегралов.

## § 2. Колебания полупространства под действием внутренних источников возмущений

Решение задач о внутренних источниках колебаний естественно подразделять на две части. В первой части решения следует рассматривать вопросы о распространении волн, вызванных действием источника, в безграничной среде. Во второй же части решения следует обратиться к учету эффектов отражения возмущений от граничной поверхности полупространства. Мы будем следовать именно такой про-

грамме действий, причем рассмотрим случаи нормальной сосредоточенной силы, а также точечного элементарного центра „сжатия“.

1. Пусть в момент  $t=0$  в точке  $\rho=0$ ,  $z=h$  безграничной изотропной упругой среды начинает действовать сила  $F_z = a(t)$ , направленная вдоль оси  $Oz$ .

Чтобы найти потенциалы поля смещений, созданного действием такой силы, разобьем, мысленно, упругую среду на два полупространства: полупространство первое  $z \geq h$  и полупространство второе  $z \leq h$  и предположим сперва, что к элементам плоскости  $z=h$  (производящей деление среды на два полупространства) приложены силы с поверхностными плотностями

$$T_\rho = 0; \quad T_z = \frac{n^2}{2\pi(1+n^2\rho^2)^2} a(t). \quad (1,2)$$

В построенном же решении потом мы совершим предельный переход  $n \rightarrow \infty$ .

Будем характеризовать поле в первом и втором полупространствах, соответственно потенциалами  $\varphi_1(\rho, z, t)$ ,  $\psi_1(\rho, z, t)$  и  $\varphi_2(\rho, z, t)$ ,  $\psi_2(\rho, z, t)$ . Тогда задача о колебаниях находившейся в покое при  $t < 0$  безграничной среды под действием сил (1, 2), включенных в момент  $t=0$  и приложенных к элементам плоскости  $z=h$ , сведется к нахождению функций  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  (в полупространстве  $z \geq h$ ), а также функций  $\varphi_2$  и  $\psi_2$  (в полупространстве  $z \leq h$ ) из волновых уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi_v}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial z^2} &= a^2 \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \psi_v + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial z^2} &= b^2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} (2,2)$$

нулевых начальных данных

$$\varphi_v \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_v \Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_v}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (3,2)$$

и следующих условий на плоскости  $z=h$ :

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{\partial (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial \rho} - \frac{\partial (\psi_1 - \psi_2)}{\partial z} \right]_{z=h} &= 0; \\ \left[ \frac{\partial (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial z} + \frac{\partial (\psi_1 - \psi_2)}{\partial \rho} + \frac{\psi_1 - \psi_2}{\rho} \right]_{z=h} &= 0; \end{aligned} \right\} (4,2)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial \rho \partial z} + b^2 \frac{\partial^2 (\psi_1 - \psi_2)}{\partial t^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 (\psi_1 - \psi_2)}{\partial z^2} \right]_{z=h} = -T_\rho; \\ \mu \left[ b^2 - 2a^2 \right] \frac{\partial^2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial z^2} + \\ + 2 \frac{\partial^2 (\psi_1 - \psi_2)}{\partial \rho \partial z} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial (\psi_1 - \psi_2)}{\partial z} \Big|_{z=h} = -T_z. \end{aligned} \right\} (5,2)$$

Заметим, что условия (4,2) выражают требование непрерывности смещений при переходе через поверхность  $z=h$ , а (5,2) выражают условия равновесия сил, приложенных к упомянутой поверхности.

Без труда можно было бы убедиться в том, что если построить решение задачи (2,2) — (5,2), а затем (в построенных решениях) совершить предельный переход  $n \rightarrow \infty$ , то получится решение задачи о сосредоточенном в точке  $\rho=0$ ,  $z=h$  источнике силы  $F_z = a(t)$ , параллельной оси  $Oz$ , расположенном в безграничной упругой среде.

Решение задачи (2,2) — (5,2) удобно искать в виде следующих интегралов Фурье-Бесселя:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_v &= \int_0^\infty A_v(z, t, k) J_0(k\rho) dk; \\ \psi_v &= \int_0^\infty B_v(z, t, k) J_1(k\rho) dk, \end{aligned} \right\} (6,2)$$

Если воспользоваться разложением (8, 1) и подставить (6,2) в уравнения (2,2) — (5,2), то придем к задаче определения функций  $A_1(z, t, k)$ ,  $B_1(z, t, k)$  (при  $z \geq h$ ) и функций  $A_2(z, t, k)$ ,  $B_2(z, t, k)$  (при  $z \leq h$ ) из решения уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A_v}{\partial z^2} - k^2 A_v &= a^2 \frac{\partial^2 A_v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 B_v}{\partial z^2} - k^2 B_v &= b^2 \frac{\partial^2 B_v}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} (7,2)$$

при нулевых начальных данных

$$A_v \Big|_{t=0} = B_v \Big|_{t=0} = \frac{\partial A_v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial B_v}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0. \quad (8,2)$$

и следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} & \left[ k(A_1 - A_2) + \frac{\partial(B_1 - B_2)}{\partial z} \right]_{z=h} = 0; \\ & \left[ \frac{\partial(A_1 - A_2)}{\partial z} + k(B_1 - B_2) \right]_{z=h} = 0; \\ & \left[ -2k \frac{\partial(A_1 - A_2)}{\partial z} + b^2 \frac{\partial^2(B_1 - B_2)}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2(B_1 - B_2)}{\partial z^2} \right]_{z=h} = 0; \\ & \mu \left[ (b^2 - 2a^2) \frac{\partial^2(A_1 - A_2)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2(A_1 - A_2)}{\partial z^2} + \right. \\ & \left. + 2k \frac{\partial(B_1 - B_2)}{\partial z} \right]_{z=h} = - \frac{ke^{-\frac{k}{n}}}{2\pi} a(t). \end{aligned} \right\} (9,2)$$

Решение же последней задачи удобно искать при помощи одностороннего преобразования Лапласа.

Полагая

$$\left. \begin{aligned} A_v(z, t, k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_v(z, k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta; \\ B_v(z, t, k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_v(z, k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \end{aligned} \right\} (10,2)$$

и делая предположение о законности дифференцирования под знаками интегралов в (10,2), можем получить из (7,2) уравнения для функций  $X_v(z, k, \zeta)$  и  $Y_v(z, k, \zeta)$ . Легко видеть, что учитывающие начальные данные (8,2) решения этих уравнений имеют вид

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= a(k, \zeta) e^{-k(z-h) \sqrt{1+\zeta^2}}; & Y_1 &= b(k, \zeta) e^{-k(z-h) \sqrt{1+\zeta^2}}; \\ X_2 &= c(k, \zeta) e^{k(z-h) \sqrt{1+\zeta^2}}; & Y_2 &= d(k, \zeta) e^{k(z-h) \sqrt{1+\zeta^2}}, \end{aligned} \right\} (11,2)$$

где  $\gamma$  имеет значение из (12,1), а функции  $a(k, \zeta)$ ,  $b(k, \zeta)$ ,  $c(k, \zeta)$  и  $d(k, \zeta)$  пока еще неизвестны и должны определяться путем учета граничных условий (9,2).

Если считать, что  $a(t)$  представляется интегралом Меллина вида<sup>1</sup>

$$a(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{k}{b} f(\zeta, k) e^{\frac{kt}{b} \zeta} d\zeta, \quad (12,2)$$

и если подставить (10,2), (11,2) и (12,2) в граничные условия (9,2), то мы получаем алгебраическую систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (a-c) - \sqrt{1+\zeta^2} (b+d) &= 0; \\ \sqrt{1+\zeta^2} (a+c) - (b-d) &= 0; \\ 2\sqrt{1+\zeta^2} (a+c) - (2+\zeta^2) (b-d) &= 0; \\ (2+\zeta^2) (a-c) - 2\sqrt{1+\zeta^2} (b+d) &= -\frac{e^{-\frac{k}{n}}}{2\pi b} f(\zeta) \end{aligned} \right\} (13,2)$$

для функций  $a(k, \zeta), \dots, d(k, \zeta)$ .

Решение последней системы оказывается следующим:

$$\left. \begin{aligned} a(k, \zeta) = -c(k, \zeta) &= -\frac{f(\zeta, k)}{4\pi b \mu \zeta^2} e^{-\frac{k}{n}}; \\ b(k, \zeta) = d(k, \zeta) &= -\frac{f(\zeta, k)}{4\pi b \mu \zeta^2 \sqrt{1+\zeta^2}} e^{-\frac{k}{n}}. \end{aligned} \right\} (14,2)$$

Для получения окончательных выражений потенциалов искомого поля следует подставить (14,2) в (11,2), в (10,2) и в (6,2). В результате подстановок получаем для потенциалов поля в полупространстве  $z \geq h$  следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{-1}{4\pi \mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(\zeta, k) e^{\frac{k}{b} \zeta - k(z-h)\sqrt{1+\zeta^2}}}{\zeta^2} d\zeta \right\} e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) dk; \\ \psi_1 &= \frac{-1}{4\pi \mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(\zeta, k) e^{\frac{k}{b} \zeta - k(z-h)\sqrt{1+\zeta^2}}}{\zeta^2 \sqrt{1+\zeta^2}} d\zeta \right\} e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk, \end{aligned} \right\} (15,2)$$

<sup>1</sup> Заметим, что если  $a(t)$  определяется по (10,1), то  $f(\zeta, k) = \frac{b}{k\zeta}$ .

Если же  $a(t) = \delta(t)$ , то следует полагать  $f(\zeta, k) = 1$ .

а для потенциалов в полупространстве  $z \leq h$ , соответственно, находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\mu b_0} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(\zeta, k) e^{\frac{k}{b} \zeta + k(z-h)\sqrt{1+\zeta^2}} \frac{d\zeta}{\zeta^2} \right\} e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) dk, \\ \psi_2 &= \frac{-1}{4\pi\mu b_0} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(\zeta, k) e^{\frac{k}{b} \zeta + k(z-h)\sqrt{1+\zeta^2}} \frac{d\zeta}{\zeta^2 \sqrt{1+\zeta^2}} \right\} e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk. \end{aligned} \right\} (16,2)$$

При этом следует подчеркнуть, что в случае включенной силы (10,1) нужно полагать

$$f(\zeta, k) = \frac{b}{k\zeta}, \quad (17,2)$$

а в случае мгновенного импульса следует считать, что

$$f(\zeta, k) = 1. \quad (17,2)$$

Обычными приемами легко можно было бы убедиться в том, что все операции, приведшие нас к окончательным формулам (15,2) и (16,2), были законными и что найденное нами решение является действительным решением поставленной задачи.

2. Рассмотрим теперь поле, созданное в безграничной среде точечным источником типа центра сжатия. Для этой цели заметим, что центр сжатия может быть представлен совокупностью трех двойных сил без моментов<sup>[15]</sup>, а также учтем известный результат, заключающийся в том, что поперечный потенциал поля, созданного нашим источником, должен равняться нулю.

Предположим сперва, что в точках поверхности  $z = h$  приложена сила с плотностью

$$T_\rho = 0; \quad T_z = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{n^2}{2\pi(1+n^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}} a(t), \quad (18,2)$$

а в точках поверхности  $z = h - \delta$  приложена противоположно направленная сила, плотность которой равна

$$T_\rho = 0; \quad T_z = -\frac{1}{\delta} \cdot \frac{n^2}{2\pi(1+n^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}} a(t). \quad (18,2)$$

На основании изложенного в п. 1 можем утверждать, что воздействие (18<sub>1,2</sub>) порождает поле, отличающееся от поля потенциалов (15,2) и (16,2) лишь множителем  $(\frac{1}{8})$ , а потенциалы поля, созданного воздействием (18<sub>2,2</sub>) представляются формулами (15,2) и (16,2) с той только разницей, что в них  $z$  заменено на  $z - \delta$  и добавлен множитель  $(-\frac{1}{8})$ . Если теперь учесть, что потенциалы результирующего поля сил (18<sub>1,2</sub>) и (18<sub>2,2</sub>) определяются наложением упомянутых потенциалов, то станет ясным, что потенциалы поля двойных сил, получающихся из (18,2) в результате предельного перехода при  $\delta \rightarrow 0$ , представляются производными по  $z$  от потенциалов (15,2) и (16,2).

Итак, мы можем утверждать, что потенциалы  $\varphi_\nu(\rho, z, t)$  и  $\psi_\nu(\rho, z, t)$  (при  $\nu = 1$  и 2) поля, созданного двойными силами, распределенными по поверхности  $z = h$  с плотностью

$$\Delta T_\rho = 0; \quad \Delta T_z = \frac{n^2}{2\pi(1+n^2\rho^2)^{\frac{3}{2}}} a(t), \quad (19,2)$$

представляются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\nu &= \frac{1}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(\zeta, k) \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} e^{\frac{k}{b}\zeta + (-)^\nu k(z-h)\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}}{\zeta^2} d\zeta \right\} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{k}{n} k J_0(k\rho) dk}, \\ \tilde{\psi}_\nu &= \frac{(-)^\nu}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(\zeta, k) e^{\frac{k}{b}\zeta + (-)^\nu k(z-h)\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}}{\zeta^2} d\zeta \right\} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{k}{n} k J_1(k\rho) dk}. \end{aligned} \quad (20,2)$$

Дабы получить поле источника типа центра сжатия, мы должны теперь подобрать на поверхности  $z = h$  такое распределение касательных сил, чтобы векторный потенциал созданного ими поля имел значения, противоположные значениям  $\psi_\nu$  из (20,2).

Нетрудно убедиться в том, что мы достигнем желаемого, если положим

$$T_z = 0; \quad T_p = -\frac{a(t)}{2\pi} \int_0^{\infty} k^2 e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk. \quad (21,2)$$

Действительно, потенциалы поля, созданного источниками (21,2) (определяемые в точности так же, как это делалось в п. 1 настоящего параграфа) и представляющиеся формулами

$$\begin{aligned} \psi_v &= \frac{1}{4\pi\mu b} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(\zeta, k) e^{\frac{k}{b} \zeta + (-)^y z \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}}}{\zeta^2 \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}} d\zeta \right\} \times \\ &\quad \times k e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) dk; \\ \psi_v &= -\psi_{v,z} = \\ &= \frac{(-)^y}{4\pi\mu b} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(\zeta, k) e^{\frac{k}{b} \zeta + (-)^y z \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}}}{\zeta^2} d\zeta \right\} \times \\ &\quad \times k e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk, \end{aligned} \quad (22,2)$$

приводят в сумме с потенциалами (20,2) к выражениям

$$\begin{aligned} \psi_v &= \frac{\gamma^2}{4\pi\mu b} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(\zeta, k) e^{\frac{k}{b} \zeta + (-)^y (z-h) \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}}}{\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}} d\zeta \right\} \times \\ &\quad \times k e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) dk; \\ \psi_v &\equiv 0, \end{aligned} \quad (23,2)$$

соответствующим (при  $n = \infty$ ) источнику типа центра сжатия, приложенному в точке  $\rho = 0, z = h$  безграничной среды.

В заключение заметим, что найденные поля (15,2), (16,2) и (23,2) строго соответствуют точечным источникам лишь при условии, что  $n \rightarrow \infty$ . Если же  $n < \infty$ , то поля, представляемые упомянутыми формулами, отвечают источникам, распределенным по некоторой области пространства, „раз-

меры\* которой практически оказываются весьма малыми, если число  $n$  очень велико.

Мы будем пользоваться упоминавшимися формулами при  $n > N$ , где  $N$  — очень большое число, и будем говорить о „точечных“ источниках даже тогда, когда воздействия прикладываются не в одной точке, а в некоторой малой по размерам области пространства.

3. Обратимся теперь к задачам о колебаниях полупространства под действием внутренних источников возмущений. При этом будем считать, что при  $t < 0$  в полупространстве царил покой, а в момент  $t = 0$  в „точке“  $\rho = 0$ ,  $z = h$  включается: или сила, параллельная оси  $Oz$ , или же центр сжатия, о котором шла речь выше.

Схема решения задач о внутренних источниках весьма проста.

Обозначая через  $\varphi^0(\rho, z, t)$  и  $\psi^0(\rho, z, t)$  потенциалы поля смещений, созданного действием источника в безграничной среде, будем искать потенциалы поля смещений в полупространстве в виде сумм

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi^0(\rho, z, t) + \varphi(\rho, z, t), \\ \psi_1 &= \psi^0(\rho, z, t) + \psi(\rho, z, t), \end{aligned} \right\} (24,2)$$

вторые слагаемые в которых, очевидно, характеризуют отраженные от границы полупространства волны.

Если обозначить через  $T_{z\rho}^0$  и  $T_{zz}^0$  напряжения

$$\left. \begin{aligned} T_{z\rho}^0 &= \mu \left[ 2 \frac{d^2\varphi^0}{d\rho dz} + b^2 \frac{d^2\psi^0}{dt^2} - 2 \frac{d^2\psi^0}{dz^2} \right]_{z=0}, \\ T_{zz}^0 &= \mu \left[ (b^2 - 2a^2) \frac{d^2\varphi^0}{dt^2} + 2 \frac{d^2\varphi^0}{dz^2} + 2 \frac{d^2\psi^0}{d\rho dz} + \frac{2}{\rho} \frac{d\psi^0}{dz} \right]_{z=0}, \end{aligned} \right\} (25,2)$$

создаваемые полем  $\varphi^0, \psi^0$  на граничной поверхности  $z = 0$  полупространства, то можно утверждать, что задача определения вторых слагаемых в (24,2) сводится к построению решения волновых уравнений (4,1) при нулевых начальных данных (5,1) и граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \mu \left[ 2 \frac{d^2\varphi}{d\rho dz} + b^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} - 2 \frac{d^2\psi}{dz^2} \right]_{z=0} &= -T_{z\rho}^0, \\ \mu \left[ (b^2 - 2a^2) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2 \frac{d^2\psi}{d\rho dz} + \frac{2}{\rho} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d\psi}{dz} \right]_{z=0} = -T_{zz}^0, \end{aligned} \right\} (26,2)$$

в которых правые части определяются по (25,2).

Сформулированная только что задача в точности совпадает с задачами, рассмотренными нами в § 1 (а также в работе [9]), поэтому на ней едва ли следует подробно останавливаться.<sup>1</sup> Мы ограничимся лишь тем, что приведем необходимые нам окончательные результаты.

Пользуясь формулами (16,2), определяющими в полупространстве  $z \leq h$  потенциалы поля, созданного источником (1,2), мы вычисляем функции (25,2). Затем мы ищем решение задачи (4,1), (5,1) и (26,2) в виде интегралов Фурье-Бесселя.

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\mu b} \int_0^{\infty} X(z, t, k) J_0(k\rho) e^{-\frac{k}{n}} dk, \\ \psi &= \frac{1}{4\pi\mu b} \int_0^{\infty} Y(z, t, k) J_1(k\rho) e^{-\frac{k}{n}} dk, \end{aligned} \right\} (27,2)$$

и легко убеждаемся в том, что функции  $X$  и  $Y$  имеют значения

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{T(\zeta) e^{-kh\sqrt{1+\zeta^2}} - 4(2+\zeta^2)e^{-kh\sqrt{1+\zeta^2}}}{\zeta^2 R(\zeta)} \times \\ &\quad \times e^{\frac{k}{b}\zeta - kz\sqrt{1+\zeta^2}} f(\zeta, k) d\zeta, \\ Y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{T(\zeta) e^{-kh\sqrt{1+\zeta^2}} - 4\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\zeta^2} (2+\zeta^2) e^{-kh\sqrt{1+\zeta^2}}}{\zeta^2 \sqrt{1+\zeta^2} R(\zeta)} \times \\ &\quad \times e^{\frac{k}{b}\zeta - kz\sqrt{1+\zeta^2}} f(\zeta, k) d\zeta, \end{aligned} \right\} (28,2)$$

в которых  $T(\zeta)$  и  $R(\zeta)$  определены по (30,2).

<sup>1</sup> Заметим, что в работе [9] рассмотрена интересующая нас задача в плоском случае. Но это не является принципиальным обстоятельством, так как легко убедиться, путем сравнения, что граничные задачи для годинтегральных функций (применяемых для представления потенциалов) в интегралах Фурье (в плоском случае) и для подинтегральных функций в наших интегралах Фурье-Бесселя (в задаче для осевой симметрии) в точности совпадают.

По формулам же (27,2) и (28,2), а также по формулам (3,1) мы определяем компоненты

$$\begin{aligned}
 q(\rho, z, t) = & \frac{1}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{T(\zeta)}{\zeta^2 R(\zeta)} e^{-k(h+z)\alpha} - \right. \right. \\
 & - \frac{4(2+\zeta^2)}{\zeta^2 R(\zeta)} e^{-kh\beta - kz\alpha} - \frac{4\alpha\beta(2+\zeta^2)}{\zeta^2 R(\zeta)} e^{-kh\alpha - kz\beta} + \\
 & \left. \left. + \frac{T(\zeta)}{\zeta^2 R(\zeta)} e^{-k(h+z)\beta} \right] e^{\frac{k}{b}\zeta} f(\zeta, k) d\zeta \right\} k e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk; \\
 w(\rho, z, t) = & \frac{1}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{\alpha T(\zeta)}{\zeta^2 R(\zeta)} e^{-k(h+z)\alpha} - \right. \right. \\
 & - \frac{4\alpha(2+\zeta^2)}{\zeta^2 R(\zeta)} e^{-kh\beta - kz\alpha} - \frac{4\alpha(2+\zeta^2)}{\zeta^2 R(\zeta)} e^{-kh\alpha - kz\beta} + \\
 & \left. \left. + \frac{T(\zeta)}{\zeta^2 R(\zeta)\beta} e^{-k(h+z)\beta} \right] e^{\frac{k}{b}\zeta} f(\zeta, k) d\zeta \right\} \times \\
 & \times k e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) dk
 \end{aligned} \quad (29,2)$$

поля смещений в полупространстве, возникающего при отражении от границы,  $z=0$  волн, возбужденных источником (1,2).

Заметим, что в формулах (29,2) мы воспользовались следующими обозначениями:

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha &= \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}; & \beta &= \sqrt{1 + \zeta^2}, \\
 R(\zeta) &= (2 + \zeta^2)^2 - 4\alpha\beta; & T(\zeta) &= (2 + \zeta^2)^2 + 4\alpha\beta.
 \end{aligned} \right\} (30,2)$$

При исследовании поля смещений, возбуждаемого в полупространстве источником (1,2), необходимо, наряду с (29,2), исследовать также и смещения, получающиеся в результате подстановки в формулы (3,1) потенциалов (15,2) и (16,2). При этом большее значение имеет поле в областях, где  $z \leq h$ .

Компоненты такого поля, получающиеся из (3,1) и (16,2), имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 q^0(\rho, z, t) &= \frac{-1}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{e^{\frac{k}{b}t} \zeta + (z-h)k \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}}{\zeta^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{e^{\frac{k}{b}t} \zeta + (z-h)k \sqrt{1+\zeta^2}}{\zeta^2} \right] f(\zeta, k) d\zeta \right\} k e^{-\frac{k}{n} J_1(k\rho) dk; \\
 w^0(\rho, z, t) &= \frac{1}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} e^{\frac{k}{b}t} \zeta + (z-h)k \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}}{\zeta^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{e^{\frac{k}{b}t} \zeta + (z-h)k \sqrt{1+\zeta^2}}{\zeta^2 \sqrt{1+\zeta^2}} \right] f(\zeta, k) d\zeta \right\} k e^{-\frac{k}{n} J_0(k\rho) dk.
 \end{aligned} \tag{31,2}$$

Заметим, что в последних формулах, равно как и в формулах (29,2), функция  $f(\zeta, k)$  определяется при помощи (12,2) по функции  $a(t)$ , характеризующей зависимость от времени интенсивности источника (1,2).

Перейдем теперь к случаю внутреннего источника типа центра сжатия.

Пользуясь формулами (23,2), определяющими в безграничной среде потенциалы поля нашего источника, вычисляем функции (25,2), ищем решение задачи (4,1); (5,1) и (26,2) в виде интегралов Фурье-Бесселя (27,2) и легко убеждаемся в том, что соответствующие функции  $X$  и  $Y$  в последних интегралах имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 X &= -\gamma^2 \frac{k}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{T(\zeta) e^{\frac{k}{b}t} \zeta - k(z+h) \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}}{\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} R(\zeta)} f(\zeta, k), \\
 Y &= -\gamma^2 \frac{k}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{4(2+\zeta^2)}{R(\zeta)} e^{\frac{k}{b}t} \zeta - 2k \sqrt{1+\zeta^2} - hk \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} f(\zeta, k) d\zeta.
 \end{aligned} \tag{32,2}$$

По формулам же (32,2) и (27,2), а также по формулам (3,1) определяем необходимые нам для исследований компоненты поля смещений

$$\begin{aligned}
 q(\rho, z, t) &= \frac{\gamma^2}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{T(\zeta) e^{-(z+h)k\alpha}}{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} R(\zeta)} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{4\sqrt{1+\zeta^2} (2+\zeta^2) e^{-kz\beta-hk\alpha}}{R(\zeta)} \right] f(\zeta, k) e^{k\frac{t}{b}\zeta} d\zeta \right\} k^2 e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk; \\
 w(\rho, z, t) &= \frac{\gamma^2}{4\pi b\mu} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ \frac{T(\zeta)}{R(\zeta)} e^{-(z+h)k\alpha} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{4(2+\zeta^2)}{R(\zeta)} e^{-zk\beta-hk\alpha} \right] f(\zeta, k) e^{k\frac{t}{b}\zeta} d\zeta \right\} k^2 e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) dk,
 \end{aligned} \tag{33,2}$$

под знаками интегралов которых мы воспользовались обозначениями (30,2).

Наряду со смещениями из (33,2) нужно исследовать также компоненты поля смещений прямой волны, определяемой потенциалом (23,2). Упомянутые компоненты в области  $z \leq h$  определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 q^0(\rho, z, t) &= \\
 &= -\frac{\gamma^2}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f(\zeta, k) e^{k\left(\frac{t}{b}\zeta+(z-h)\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\right)}}{\sqrt{1+\zeta^2}} d\zeta \right\} \times \\
 &\quad \times k^2 e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk; \\
 w^0(\rho, z, t) &= \\
 &= \frac{\gamma^2}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(\zeta, k) e^{k\left(\frac{t}{b}\zeta+(z-h)\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\right)} d\zeta \right\} \times \\
 &\quad \times k^2 e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) dk
 \end{aligned} \tag{34,2}$$

В заключение параграфа подчеркнем, что в некоторых из наших формул нельзя переходить к пределу  $n \rightarrow \infty$  под знаками интегралов. Таковыми являются: формулы (32,2), как в случае импульса  $a(t) = \delta(t)$ , так и в случае включенной силы (12,1), а также (в случае импульса) формулы (20,2), (22,2), (23,2) и (29,2). Во всех этих формулах необходимо до предельного перехода совершить подходящие преобразования интегралов, и затем лишь переходить к пределу  $n \rightarrow \infty$ . Это мы должны будем иметь в виду во всем ниже-следующем.

## ГЛАВА II

### ОБЩИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОСТРОЕННЫХ РЕШЕНИЙ

В настоящей главе при выяснении качественной картины распространения возмущений в полупространстве мы будем исходить из представления решений в виде двукратных интегралов из § 1 или § 2. Путем деформации контуров интегрирования интегралов Меллина мы будем приводить упомянутые интегралы к сумме вычетов в точке  $\zeta = 0$ , в точках  $\zeta = \pm i\vartheta$ , являющихся простыми корнями уравнения Релея, а также интегралов, распространенных по контурам, обходящим разрезы  $(i, i\infty)$  и  $(-i, -i\infty)$ , проведенные для униформизации радикалов. В последних интегралах мы будем переходить к вещественной переменной интегрирования  $\lambda$  и будем переставлять порядок интегрирования по  $\lambda$  и по  $k$ .

Выполнение интегрирования по  $k$  позволит нам получить решение в виде суммы трех слагаемых, исследование которых удобно будет производить по отдельности.

В результате качественных исследований настоящего параграфа мы сможем убедиться в том, что при  $n \rightarrow \infty$  (или же при  $n \gg 1$ ) каждое из трех слагаемых имеет свой собственный физический смысл. Первое слагаемое, соответствующее вычету в точке  $\zeta = 0$ , даст нам в точности решение соответствующей статической задачи теории упругости; второе слагаемое, соответствующее сумме вычетов в точках  $\zeta = \pm i\vartheta$ , даст нам главные части поверхностной волны Релея; и, наконец, третье слагаемое, представляющееся интегралами, будет характеризовать возмущения, обладающие особенностями на фронтах продольных и поперечных волн.

Что же касается количественных исследований компонент вектора упругих смещений, к которым мы перейдем в § 6,

то для их проведения мы будем применять все три различных формы представления решений (а не только представления в виде двукратных интегралов). Решение поступать таким образом вызвано тем обстоятельством, что в различных областях изменения переменных  $\rho$ ,  $z$  и  $t$  какое-либо одно из упомянутых представлений может иметь преимущества (в отношении получения необходимых количественных результатов) по сравнению со всеми остальными. Поэтому выбор представления решения задачи нельзя предпринять заранее.

*§ 3. Качественное исследование решения задачи о полупространстве при граничной включенной единичной силе*

1. Рассмотрим прежде всего основное элементарное решение, соответствующее включенной единичной силе (10,1) и имеющее вид (17,1). Нетрудно видеть, что первые слагаемые последних формул отличны от нуля только, если  $\frac{t}{b} \geq \tau z$ , а вторые слагаемые отличны от нуля только при  $\frac{t}{b} \geq z$ . Поэтому мы должны рассматривать лишь значения  $z$  и  $t$ , удовлетворяющие предыдущим неравенствам.

Для того чтобы сделать подинтегральные функции в рассматриваемых интегралах однозначными, на плоскости переменной  $\zeta$  следует провести разрезы. Будем проводить упомянутые разрезы вдоль мнимой оси вне промежутка  $(-i, i)$ , причем ветви радикалов будем фиксировать условиями (12<sub>1</sub>,1). Производя деформацию путей интегрирования в интегралах (17,1), мы можем представить их через вычеты в точках  $\zeta=0$  и  $\zeta=\pm i\vartheta$ , являющихся корнями уравнения Релея

$$R(\zeta) = (2 + \zeta^2)^2 - 4\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \tau^2 \zeta^2} = 0, \quad (1,3)$$

а также через интегралы, распространенные по контурам, обходящим упомянутые разрезы. Таким образом, поле смещений можно разбить на сумму трех слагаемых

$$q = q_0 + q_R + q_\lambda; \quad w = w_0 + w_R + w_\lambda, \quad (2,3)$$

отвечающих, соответственно, вычету подинтегральных функций в (17,1) в точке  $\zeta=0$ , сумме вычетов в простых корнях  $\zeta = \pm i\vartheta$  уравнения Релея и интегралам по разрезам.

Удобство такого разбиения заключается в том, что (как мы увидим в дальнейшем) каждое из слагаемых (2,3) обла-

дает особенностями, позволяющими давать им различные физические толкования и представляется формулами, исследование которых оказывается значительно более простым, нежели исследование формул (28,1), дающих в замкнутой форме все поле смещений.

2. Определение первых слагаемых в (2,3) приводит к формулам

$$\begin{aligned}
 q_0(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^\infty \left( \frac{-\gamma^2}{1-\gamma^2} e^{-k\left(z+\frac{1}{n}\right)} + \right. \\
 &+ \left. k\left(z+\frac{1}{n}\right) e^{-k\left(z+\frac{1}{n}\right)} \right) J_1(k\rho) dk = \\
 &= \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \frac{\rho\left(z+\frac{1}{n}\right)}{\left[\rho^2+\left(z+\frac{1}{n}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2}{a^2-b^2} \left( \frac{1}{\rho} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{z+\frac{1}{n}}{\rho\sqrt{\rho^2+\left(z+\frac{1}{n}\right)^2}} \right) \right\}, \tag{3,3} \\
 w_0(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^\infty \left( \frac{1}{1-\gamma^2} e^{-k\left(z+\frac{1}{n}\right)} + \right. \\
 &+ \left. k\left(z+\frac{1}{n}\right) e^{-k\left(z+\frac{1}{n}\right)} \right) J_0(k\rho) dk = \\
 &= \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \frac{\left(z+\frac{1}{n}\right)^2}{\left[\rho^2+\left(z+\frac{1}{n}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b^2}{a^2-b^2} \frac{1}{\sqrt{\rho^2+\left(z+\frac{1}{n}\right)^2}} \right\},
 \end{aligned}$$

которые переходят при  $n \rightarrow \infty$  в статическое решение Буссинеска. В дальнейшем будет показано, что вторые и третьи слагаемые в (2,3) с возрастанием времени убывают и при  $t \rightarrow \infty$  обращаются в нуль в любой точке полупространства.

3. Определение сумм вычетов в простых корнях  $\zeta = \pm i\delta$  уравнения Релея дает нам следующие выражения для вторых слагаемых в (2,3):

$$\begin{aligned}
 q_R(z, t, k) &= \frac{1}{\pi\mu} \int_0^{\infty} \left[ \frac{(2 - \delta^2) e^{-k \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \delta^2} + \frac{1}{n} \right)} \cos k \frac{t}{b} \delta}{4\delta^2 c_0} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2\sqrt{1 - \delta^2} \sqrt{1 - \gamma^2 \delta^2} e^{-k \left( z \sqrt{1 - \delta^2} + \frac{1}{n} \right)} \cos k \frac{t}{b} \delta}{4\delta^2 c_0} \right] J_1(k\rho) dk, \\
 w_R(z, t, k) &= \\
 &= \frac{1}{\pi\mu} \int_0^{\infty} \left[ \frac{(2 - \delta^2) \sqrt{1 - \gamma^2 \delta^2} e^{-k \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \delta^2} + \frac{1}{n} \right)} \cos k \frac{t}{b} \delta}{4\delta^2 c_0} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2\sqrt{1 - \gamma^2 \delta^2} e^{-k \left( z \sqrt{1 - \delta^2} + \frac{1}{n} \right)} \cos k \frac{t}{b} \delta}{4\delta^2 c_0} \right] J_0(k\rho) dk,
 \end{aligned} \tag{4,3}$$

где  $c_0 > 0$  постоянная, определяющаяся по формуле

$$c_0 = \frac{\sqrt{1 - \gamma^2 \delta^2}}{\sqrt{1 - \delta^2}} + \frac{\gamma^2 \sqrt{1 - \delta^2}}{\sqrt{1 - \gamma^2 \delta^2}} - 2 + \delta^2. \tag{5,3}$$

В дальнейшем у нас неоднократно будут встречаться специальные интегралы вида

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha k} \cos k\delta J_\rho(\beta k) dk; \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha k} \sin k\delta J_\rho(\beta k) dk.$$

Для вычисления упомянутых интегралов будем заменять  $\cos k\delta$ ,  $\sin k\delta$  соответственно на  $\operatorname{Re} e^{ik\delta}$ ,  $\operatorname{Re} \frac{1}{i} e^{ik\delta}$ , а затем:

будем пользоваться известными интегралами цилиндрических функций [16]

$$\int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\delta)k} J_p(\beta k) dk = \frac{\{V(\alpha-i\delta)^2 + \beta^2 - \alpha + i\delta\}^p}{\beta^p V(\alpha-i\delta)^2 + \beta^2}; \quad (6,3)$$

$$\operatorname{Re}(\alpha - i\delta \pm i\beta) > 0,$$

которые мы уже применяли при получении формул (18,1). Пользуясь предыдущими формулами и выполняя в (4,3) интегрирование по  $k$ , получаем равенства

$$q_R = \frac{1}{4\pi\mu\vartheta^2 c_0} \times$$

$$\times \operatorname{Re} \left\{ (2-\vartheta^2) \frac{V\left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n} - i\vartheta\frac{t}{b}\right)^2 + \rho^2 - \left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n} - i\frac{t}{b}\vartheta\right)}{\rho V\left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n} - i\vartheta\frac{t}{b}\right)^2 + \rho^2} - \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{1-\vartheta^2} \sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{V\left(z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n} - i\vartheta\frac{t}{b}\right)^2 + \rho^2 - \left(z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n} - i\frac{t}{b}\vartheta\right)}{\rho V\left(z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n} - i\vartheta\frac{t}{b}\right)^2 + \rho^2} \right\}, \quad (7,3)$$

$$w_R = \frac{1}{4\pi\mu\vartheta^2 c_0} \times$$

$$\times \operatorname{Re} \left\{ (2-\vartheta^2) \sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} \frac{1}{V\left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n} - i\vartheta\frac{t}{b}\right)^2 + \rho^2} - \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} \frac{1}{V\left(z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n} - i\vartheta\frac{t}{b}\right)^2 + \rho^2} \right\},$$

ветви радикалов в которых выбираются некоторым определенным образом, соответствующим записи значений инте-

гралов (7,3) в следующем (более удобном) окончательном виде:

$$\begin{aligned}
 q_R = & \frac{1}{4\pi\mu\vartheta^2 c_0} \left\{ \frac{2 - \vartheta^2 - 2\sqrt{1 - \vartheta^2} \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{\rho} + \right. \\
 & + \frac{2 - \vartheta^2}{\rho^4 \sqrt{R_\gamma(\vartheta)}} \left[ \vartheta \frac{t}{b} \sin \frac{\theta_\gamma}{2} - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{1}{n} + z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \right) \cos \frac{\theta_\gamma(\vartheta)}{2} \right] - \\
 & - \frac{2\sqrt{1 - \vartheta^2} \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{\rho^4 \sqrt{R_1(\vartheta)}} \left[ \vartheta \frac{t}{b} \sin \frac{\theta_1(\vartheta)}{2} - \right. \\
 & \left. \left. - \left( \frac{1}{n} + z \sqrt{1 - \vartheta^2} \right) \cos \frac{\theta_1(\vartheta)}{2} \right] \right\}, \\
 w_R = & \frac{1}{4\pi\mu\vartheta^2 c_0} \left\{ \frac{(2 - \vartheta^2) \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{\sqrt{R_\gamma(\vartheta)}} \cos \frac{\theta_\gamma(\vartheta)}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{2\sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{\sqrt{R_1(\vartheta)}} \cos \frac{\theta_1(\vartheta)}{2} \right\},
 \end{aligned} \tag{8,3}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned}
 R_\gamma(\vartheta) = & \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right)^2 + 2 \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} + \right. \\
 & \left. + \rho^2 \right) + \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^4, \\
 R_1(\vartheta) = & \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right)^2 + 2 \left( z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} + \right. \\
 & \left. + \rho^2 \right) + \left( z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^4, \\
 \theta_\gamma(\vartheta) = & \operatorname{arctg} \frac{2\vartheta \frac{t}{b} \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)}{\left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right) - \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2}, \\
 \theta_1(\vartheta) = & \operatorname{arctg} \frac{2\vartheta \frac{t}{b} \left( z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)}{\left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right) - \left( z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2},
 \end{aligned} \tag{9,3}$$

а ветви арктангенса фиксируются следующими условиями:

$$\begin{aligned}
 & \text{если } \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 - \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 \geq 0, \\
 & \quad \text{то } -\pi \leq \theta_\gamma \leq -\frac{\pi}{2}; \\
 & \text{если } \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 - \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 \leq 0, \\
 & \quad \text{то } -\frac{\pi}{2} \leq \theta_\gamma \leq 0; \\
 & \text{если } \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 - \left( z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 \geq 0, \\
 & \quad \text{то } -\pi \leq \theta_1 \leq -\frac{\pi}{2}; \\
 & \text{если } \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 - \left( z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 \leq 0, \\
 & \quad \text{то } -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0.
 \end{aligned} \tag{10,3}$$

Разложение формул (7,3) в ряды по степеням  $\frac{1}{t}$  при больших  $t$  дает следующие главные части для  $q_R$  и  $\omega_R$ :

$$\begin{aligned}
 q_R & \sim \frac{-(2 - \vartheta^2)}{16\pi\mu c_0} \frac{\rho}{\vartheta^2 \frac{t^2}{b^2}}; \\
 \omega_R & \sim \frac{\sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{4\pi\mu c_0 \vartheta^2} \left\{ (2 - \vartheta^2) \frac{z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n}}{\vartheta^2 \frac{t^2}{b^2}} - \right. \\
 & \quad \left. - 2 \frac{z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n}}{\vartheta^2 \frac{t^2}{b^2}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{11,3}$$

Для анализа возмущений с точки зрения движущегося со скоростью волны Релея наблюдателя введем новую координату  $m$  по формуле

$$m = \vartheta \frac{t}{b} - \rho = v_R t - \rho, \tag{12,3}$$

в которой постоянная  $\frac{\vartheta}{b} = v_R$  равна упомянутой скорости. Тогда главная часть (8,3) при больших  $t$  представится в виде

$$\begin{aligned}
 q_R \sim & \frac{1}{4\sqrt{2}\pi\mu\vartheta^2c_0} \sqrt{\frac{t}{\vartheta b}} \left\{ \frac{2-\vartheta^2}{\sqrt[4]{m^2 + \left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n}\right)^2}} \times \right. \\
 & \times \sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n}}{m} - \\
 & \left. - \frac{2\sqrt{1-\vartheta^2}\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{\sqrt[4]{m^2 + \left(z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n}\right)^2}} \sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n}}{m} \right\}, \\
 w_R \sim & \frac{1}{4\sqrt{2}\pi\mu\vartheta^2c_0} \sqrt{\frac{t}{\vartheta b}} \left\{ \frac{(2-\vartheta^2)\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{\sqrt[4]{m^2 + \left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n}\right)^2}} \times \right. \\
 & \times \cos \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n}}{m} - \\
 & \left. - \frac{2\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{\sqrt[4]{m^2 + \left(z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n}\right)^2}} \cos \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n}}{m} \right\}.
 \end{aligned} \tag{13,3}$$

Заметим, что при определении в последней формуле значений  $\operatorname{arctg}$  надлежит принимать во внимание (10,3) и (9,3).

Из формул (13,3) следует, что при больших значениях  $t$  максимальные смещения будут иметь место в точке  $m=0$ ,  $z=0$ . В пределе  $n \rightarrow \infty$  эти смещения оказываются бесконечно большими. Из этих же формул заключаем, что для наблюдателя, движущегося со скоростью  $v_R$ , при больших  $t$  интенсивность рассматриваемой части смещений убывает, как  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ .

Если рассматривать процесс с точки зрения наблюдателя, движущегося с произвольной скоростью  $\lambda^* \neq v_R$ , то вместо (12,3) нужно сделать замену:

$$m = \lambda^* t - \rho; \quad \lambda^* \neq v_R. \tag{12,3}$$

Тогда при больших  $t$  величины  $q_R$  и  $w_R$  оказываются убывающими, как  $\frac{1}{t}$ . Аналогичная замена в остальных слагаемых (2,3) (как мы увидим ниже) приводит также к убыванию их, как  $\frac{1}{t}$  при любых  $\lambda^*$ , в том числе и  $\lambda^* = v_R$ .

Сказанное по отношению к  $q_0$  и  $w_0$  представляется очевидным.

Что же касается  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$ , то для них высказанное утверждение мы проверим в дальнейшем.

Примерные графики значений (13,3), как функций от  $m$ , при  $z = h > 0$  указаны на рис. 1 и 2 сплошной линией. При

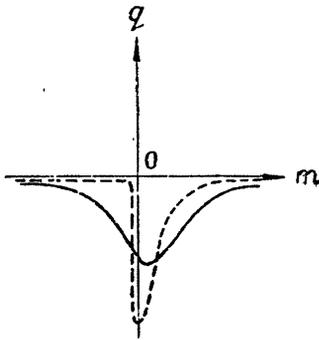


Рис. 1

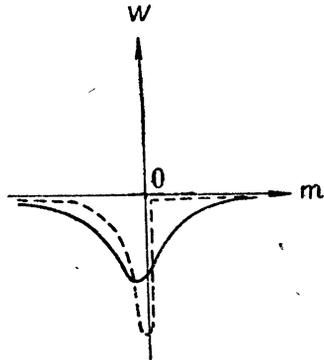


Рис. 2

$z = 0$  и  $n < \infty$  они обозначены пунктирной линией, которая в случае  $n = \infty$  совпадает с осью  $m$  с одной стороны от точки  $m = 0$  и асимптотически приближается к осям с другой стороны от этой точки.

Из формул (3,3), (7,3) и (13,3), а также формул, которые нам встретятся в дальнейшем, нетрудно видеть, что малый параметр  $\frac{1}{n}$  не имеет влияния на величину функций в областях, удаленных от точки приложения силы, от критической точки ( $\rho = \vartheta \frac{t}{b}; z = 0$ ) поверхностных волн Релея и от точек на характеристиках, представляющих собой известные фронты продольных и поперечных волн, возбуждаемых точечным источником. Вблизи же таких точек этот параметр

весьма влияет на быстроту изменения некоторых функций, оставляя, однако, их непрерывными. Если же этот параметр положить равным нулю, то в упомянутых точках функции могут иметь конечные или бесконечные разрывы.

4. Последние слагаемые формул (2,3) определяются интегралами, которые получаются из (17,1) заменой контура интегрирования  $\text{Re } \zeta = \sigma$  на контуры, обходящие разрезы  $(i, i\infty)$ ,  $(-i, -i\infty)$  (рис. 3). Если учесть нашу униформизацию радикалов (12,1)<sup>1</sup> и вычислять эти интегралы отдельно по правому и левому берегам разрезов, то  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$  выразятся через следующие интегралы уже с вещественной переменной интегрирования:

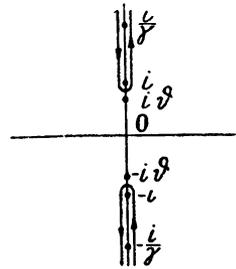


Рис. 3

$$\begin{aligned}
 q_\lambda = & -\frac{1}{2\pi^2\mu} \int_0^\infty \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{2(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \left[ \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. -z\sqrt{\lambda^2-1} \right) + \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda + z\sqrt{\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda + \right. \\
 & \left. + \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{8(\lambda^2-1)(1-\gamma^2\lambda^2)}{\lambda P(\lambda)} \left[ \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda + z\sqrt{\lambda^2-1} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda - z\sqrt{\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda + \right. \\
 & \left. + \int_{\frac{1}{\gamma}}^\infty \frac{2\sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{\gamma^2\lambda^2-1}}{\lambda Q(\lambda)} \left[ \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda + z\sqrt{\lambda^2-1} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda - z\sqrt{\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda + \right. \\
 & \left. + \int_{\frac{1}{\gamma}}^\infty \frac{2-\lambda^2}{\lambda Q(\lambda)} \left[ \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda + z\sqrt{\gamma^2\lambda^2-1} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda - z\sqrt{\gamma^2\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda \right\}
 \end{aligned} \tag{14,3}$$

<sup>1</sup> При этом на берегах разрезов, примыкающих к правой полуплоскости, радикалы оказываются положительными мнимыми на положительной части мнимой оси и отрицательными мнимыми на отрицательной части мнимой оси.

$$\begin{aligned}
 & - \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1} \right) \Big] d\lambda - \\
 & - \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{8(2-\lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} e^{-kz \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}} \cos k \frac{t}{b} \lambda d\lambda \Big\} \times \\
 & \quad \times e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk, \\
 \omega_\lambda = & - \frac{1}{2\pi^2 \mu} \int_0^\infty \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{8(1-\gamma^2 \lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda P(\lambda)} \left[ \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - z \sqrt{\lambda^2-1} \right) + \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda - \right. \\
 & \left. - \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{2(2-\lambda^2)^2 \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \left[ \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda + \right. \quad (14,3) \\
 & \left. + \int_{\frac{1}{\gamma}}^\infty \frac{2 \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1}}{\lambda Q(\lambda)} \left[ \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda - \right. \\
 & \left. - \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{8(2-\lambda^2)(1-\gamma^2 \lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda P(\lambda)} e^{-kz \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}} \cos k \frac{t}{b} \lambda d\lambda - \right. \\
 & \left. - \int_{\frac{1}{\gamma}}^\infty \frac{(2-\lambda^2) \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1}}{\lambda Q(\lambda)} \left[ \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1} \right) \right] d\lambda \right\} e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) dk,
 \end{aligned}$$

в которых

$$P(\lambda) = (2 - \lambda^2)^4 + 16(\lambda^2 - 1)(1 - \gamma^2 \lambda^2); \quad (15,3)$$

$$Q(\lambda) = (2 - \lambda^2)^2 + 4 \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1}. \quad (16,3)$$

Все радикалы, входящие в подинтегральные функции формул (14,3), понимаются в арифметическом смысле.

Нашей дальнейшей целью является изменение порядка интегрирования в формулах (14,3) и выполнение интегрирования по  $k$  с последующим переходом к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . Эти операции позволяют убедиться в представимости предыдущих интегралов различными формулами в зависимости от того, какую часть всей области изменения переменных  $(\rho, z, t)$  мы рассматриваем.

Если ввести новые переменные  $\xi$  и  $\eta$  по формулам

$$\xi = \frac{b\rho}{t}; \quad \eta = \frac{bz}{t}, \quad (17,3)$$

то сечение всей области возмущения плоскостью, проходящей через ось  $z$ , можно определить полукругом, указанным на рис. 4. Радиус этого полукруга, равный  $\frac{1}{\gamma}$ , определяет в переменных  $(\xi, \eta)$  расстояние от источника до фронта продольной волны, а переменная  $\xi$  обозначает расстояние до вертикальной оси. Помимо области, расположенной впереди фронта продольной волны и характеризующейся при  $n \rightarrow \infty$  отсутствием в ней возмущений, качественно различными будут также области I, II и III (рис. 4). Область III соответствует пространству, расположенному между фронтами продольных и поперечных волн, и смещения в ней определяются лишь скалярным потенциалом  $\phi$ . Смещения в областях I и II определяются и скалярным  $\phi$  и векторным  $\psi$  потенциалами. Но область II отличается от области I тем, что в ней поперечные волны возбуждены лишь в результате отражения от границы продольных волн, распространяющихся с большей скоростью, нежели волны поперечные [3], [6]. В дальнейшем исследование наших решений осесимметрических задач не только подтвердит эти известные выводы, но и дополнит их анализом изменения смещений при переходе через границы, разделяющие качественно различные области возмущений.

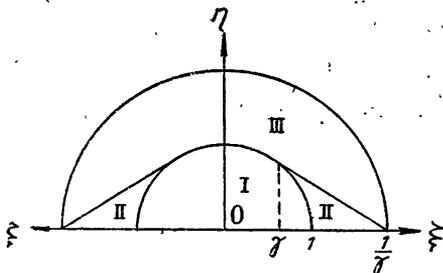


Рис. 4

Принимая во внимание изложенное, удобно представить  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$  в виде суммы двух слагаемых

$$q_\lambda = q_{\lambda\varphi} + q_{\lambda\psi}; \quad w_\lambda = w_{\lambda\varphi} + w_{\lambda\psi}, \quad (18,3)$$

где  $q_{\lambda\varphi}$  и  $w_{\lambda\varphi}$  соответствуют частям смещений, полученным от скалярного потенциала  $\varphi$  и определяющимся двумя последними интегралами формул (14,3), а  $q_{\lambda\psi}$  и  $w_{\lambda\psi}$  соответствуют частям смещений, полученным от векторного потенциала  $\psi$  и определяющимся остальными интегралами тех же формул.

5. Найдем сначала слагаемые  $q_{\lambda\varphi}$  и  $w_{\lambda\varphi}$ . Нетрудно видеть, что для всей области возмущения, т. е. позади фронта продольной волны, уравнения<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1} - \rho = 0 \quad \text{и} \quad \frac{t}{b} \lambda + \\ + z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1} - \rho = 0 \end{aligned} \quad (19,3)$$

не имеют вещественных корней относительно  $\lambda$ . Следовательно, при  $\lambda > \frac{1}{\gamma}$  всегда справедливы неравенства

$$\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1} > \rho; \quad \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1} > \rho. \quad (20,3)$$

Выполним интегрирование по  $k$  в последних двух интегралах каждой из формул (14,3), а затем совершим предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ . (Ввиду равномерной относительно  $n$  сходимости получающихся интегралов по переменной  $\lambda$  такой переход является допустимым). При этом легко можно убедиться, что интегралы с пределами интегрирования  $\left(\frac{1}{\gamma}, \infty\right)$  обращаются в нуль. Поэтому для функций  $q_{\lambda\varphi}$  и  $w_{\lambda\varphi}$  получаются формулы

$$\left. \begin{aligned} q_{\lambda\varphi} = \frac{4}{\pi^2 \mu \rho} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{\lambda \rho(\lambda)} \times \\ \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sqrt{\rho^2 + \left(z \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2} - i \frac{t}{b} \lambda\right)^2} - \left(z \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2} - i \frac{t}{b} \lambda\right)}{\sqrt{\rho^2 + \left(z \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2} - i \frac{t}{b} \lambda\right)^2}} \right\} d\lambda; \end{aligned} \right\} (21,3)$$

<sup>1</sup> Левые части этих, а также встречающихся далее уравнений (28,3) совпадают, соответственно, с левыми частями уравнений (19,1) при мнимых  $\zeta$  и  $n = \infty$ .

$$w_{\lambda\varphi} = \frac{4}{\pi^2 \mu} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)(1-\gamma^2\lambda^2)\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda P(\lambda)} \times \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (21,3) \\ \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left( z \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2} - i \frac{t}{b} \lambda \right)^2}} \right\} d\lambda,$$

где  $P_\lambda$  имеет значение (15,3). [Ветви радикалов в (21,3) фиксируются так же, как и в формулах (7,3).]

Если в (21,3) отделить вещественную и мнимую части, то окончательная форма искомых функций определится равенствами

$$q_{\lambda\varphi} = \frac{4}{\pi^2 \mu \rho} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \left\{ 1 + \right. \\ \left. + \frac{\lambda \frac{t}{b} \sin \frac{\theta_\gamma(\lambda)}{2} - z \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2} \cos \frac{\theta_\gamma(\lambda)}{2}}{\sqrt[4]{R_\gamma(\lambda)}} \right\} d\lambda; \quad (22,3) \\ w_{\lambda\varphi} = \frac{4}{\pi^2 \mu} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)(1-\gamma^2\lambda^2)\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda P(\lambda)} \times \\ \times \frac{\cos \frac{\theta_\gamma(\lambda)}{2}}{\sqrt[4]{R_\gamma(\lambda)}} d\lambda,$$

в которых  $R_\gamma(\lambda)$  и  $\theta_\gamma(\lambda)$  берутся из (9,3) и (10,3) с заменой  $\vartheta$  на  $\lambda$  и  $n$  на  $\infty$ . Таким образом, во всех исследуемых областях I, II и III  $q_{\lambda\varphi}$  и  $w_{\lambda\varphi}$  определяются одной и той же формулой (21,3) или (22,3).

6. Прежде чем переходить к вычислению слагаемых  $q_{\lambda\varphi}$  и  $w_{\lambda\varphi}$ , входящих в формулы (18,3), сделаем несколько замечаний относительно определения поля упругих смещений в области III. Эта область, как уже говорилось, характеризуется при  $n \rightarrow \infty$  тем, что в ней отсутствуют попе-

речные волны. Поэтому можем считать, что при  $n \rightarrow \infty$  возмущения в этой области определяются лишь скалярным потенциалом.

Если выделенные ранее части смещений  $q_0, w_0, q_R, w_R$  подобно (18,3) представить в виде

$$q_0 = q_{0\varphi} + q_{0\psi}; \quad w_0 = w_{0\varphi} + w_{0\psi}; \quad (23,3)$$

$$q_R = q_{R\varphi} + q_{R\psi}; \quad w_R = w_{R\varphi} + w_{R\psi}, \quad (24,3)$$

где слагаемые со значком  $\varphi$  получены от скалярного, а со значком  $\psi$  — от векторного потенциала, то отмеченное для области III обстоятельство можно выразить следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} q_{III} &= q_{\varphi III} = q_{0\varphi III} + q_{R\varphi III} + q_{\lambda\varphi III}; \\ w_{III} &= w_{\varphi III} = w_{0\varphi III} + w_{R\varphi III} + w_{\lambda\varphi III}; \\ 0 &= q_{\psi III} = q_{0\psi III} + q_{R\psi III} + q_{\lambda\psi III}; \\ 0 &= w_{\psi III} = w_{0\psi III} + w_{R\psi III} + w_{\lambda\psi III}. \end{aligned} \right\} (25,3)$$

Вследствие этого, смещения в области III можно определять посредством первых двух равенств (25,3), в которых

$$\left. \begin{aligned} q_{0\varphi} &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1 + \gamma^4}{4(1 - \gamma^2)^2} + \frac{\gamma^2 z}{2(1 - \gamma^2)} k - \right. \\ &\quad \left. - \frac{l^2}{2(1 - \gamma^2)} k^2 \right] e^{-kz} J_1(k\rho) dk = \\ &= \frac{1}{4\pi\mu(1 - \gamma^2)} \left\{ \frac{1 + \gamma^4}{2(1 - \gamma^2)} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{z}{\rho\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma^2 \rho z}{(z^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\rho z \frac{l^2}{b^2}}{(z^2 + \rho^2)^{\frac{5}{2}}} \right\}; \end{aligned} \right\} (26,3)$$

$$w_{0\varphi} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{\infty} \left[ \frac{1-2\gamma^2+3\gamma^4}{4(1-\gamma^2)} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2 z}{2(1-\gamma^2)} k - \frac{t^2}{2(1-\gamma^2)} \frac{t^2}{b^2} k^2 \right] e^{-kz} J_0(k\rho) dk = \quad (26,3)$$

$$= \frac{1}{4\pi\mu(1-\gamma^2)} \left\{ \frac{1-2\gamma^2+3\gamma^4}{2(1-\gamma^2)} \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2 z^2 + \frac{t^2}{b^2}}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3z^2 \frac{t^2}{b^2}}{(z^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}} \right\},$$

$$q_{R\varphi} = \frac{2-\vartheta^2}{4\pi\mu\vartheta^2 c_0 \rho} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{R_\gamma(\vartheta)}} \left[ \vartheta \frac{t}{b} \sin \frac{\theta_\gamma(\vartheta)}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} \cos \frac{\theta_\gamma(\vartheta)}{2} \right] \right\}; \quad (27,3)$$

$$w_{R\varphi} = \frac{(2-\vartheta^2)\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{4\pi\mu^2 c_0 \sqrt{R_\gamma(\vartheta)}} \cos \frac{\theta_\gamma(\vartheta)}{2},$$

а  $R_\gamma(\vartheta)$  и  $\theta_\gamma(\vartheta)$  имеют значения (9,3) и (10,3) при  $n = \infty$ . Слагаемые же  $q_{\lambda\varphi}$  и  $w_{\lambda\varphi}$  определяются по формулам (21,3) или (22,3).

Из вышеизложенного следует, что для вычисления смещений в области III при  $n \rightarrow \infty$  не требуется определять в этой области значений  $q_{\lambda\varphi}$  и  $w_{\lambda\varphi}$ .

Как мы увидим в дальнейшем, определение этих значений оказывается полезным в целях выяснения вопроса о том, как будут изменяться смещения, если переходить из областей I и II в область III.

7. Займемся теперь вычислением слагаемых  $q_{\lambda\varphi}$  и  $w_{\lambda\varphi}$  в (18,3). Эти слагаемые, в отличие от рассмотренных ранее слагаемых  $q_{\lambda\varphi}$  и  $w_{\lambda\varphi}$ , также входящих в формулы (18,3), представляются для различных областей различными фор-

мулами. Условимся обозначать их, соответственно, тем же номером, каким обозначается область, в которой эти слабые определяются.

Легко проверить, что уравнения

$$\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} - \rho = 0; \quad \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} - \rho = 0 \quad (28,3)$$

не имеют в области I вещественных корней, и, следовательно, для всех  $\lambda > 1$  выполняются неравенства

$$\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} > \rho; \quad \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} > \rho. \quad (29,3)$$

Выполняя интегрирование по  $k$  в первых трех интегралах каждой из формул (14,3) и совершая затем предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ , убеждаемся посредством вычислений, подобных вычислениям п. 5, что в первой формуле второй и третий интегралы, а во второй первой и третий интегралы [в силу (29,3)] обращаются в нуль. Отличные же от нуля интегралы дают следующие значения для  $q_{\lambda\Phi I}$  и  $w_{\lambda\Phi I}$ :

$$\begin{aligned} q_{\lambda\Phi I} &= \frac{1}{\pi^2 \mu \rho} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \rho^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \rho^2}} \right\} d\lambda - \\ &\quad - \frac{2}{\pi^2 \mu \rho} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} d\lambda, \\ w_{\lambda\Phi I} &= \frac{1}{\pi^2 \mu} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \rho^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \rho^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (30,3)$$

Переходя к области II, мы прежде всего отметим некоторые неравенства, которые оказываются необходимыми для определения промежутков интегрирования встречающихся далее интегралов.

Если каждое из уравнений (28,3) поделить на  $\frac{t}{b}$ , то получаются следующие уравнения в переменных  $\xi$ ,  $\eta$ :

$$\lambda - \eta \sqrt{\lambda^2 - 1} - \xi = 0; \quad \lambda + \eta \sqrt{\lambda^2 - 1} - \xi = 0. \quad (31,3)$$

Эти уравнения при фиксированных  $\lambda$  определяют две прямые, касательные к окружности единичного радиуса  $\xi^2 + \eta^2 = 1$  (рис. 5).

При изменении  $\lambda$  от 1 до  $\infty$  эти прямые поворачиваются в различных направлениях и переходят из общего положения,  $\xi = 1$ , соответственно, в положения  $\eta = 1$  и  $\eta = -1$ .

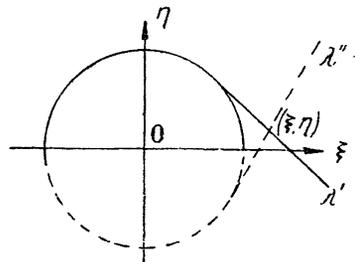


Рис. 5

Рассмотрим прежде всего точки, для которых  $\xi > 1$ ,  $\eta < 1$ . Исследуя положения прямых (31,3) при различных значениях  $\lambda > 1$ , не представляет труда убедиться в том,

что для таких точек первое из уравнений (28,3) имеет один вещественный корень

$$\lambda' = \frac{\frac{t}{b} \rho + z \sqrt{z^2 + \rho^2 - \frac{t^2}{b^2}}}{\frac{t^2}{b^2} - z^2}, \quad (32,3)$$

который больше единицы. При этом оказываются справедливыми следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{b} - z \sqrt{\lambda^2 - 1} > \rho & \text{ для } \lambda > \lambda', \\ \frac{t}{b} - z \sqrt{\lambda^2 - 1} < \rho & \text{ для } \lambda < \lambda'. \end{aligned} \right\} \quad (33,3)$$

Второе уравнение из (28,3) (соответственно рассматриваемым точкам) также имеет лишь один вещественный корень, превосходящий единицу:

$$\lambda'' = \frac{\frac{t}{b} \rho - z \sqrt{z^2 + \rho^2 - \frac{t^2}{b^2}}}{\frac{t^2}{b^2} - z^2}. \quad (34,3)$$

При этом справедливы неравенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} > \rho, \text{ для } \lambda > \lambda''; \\ \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} < \rho, \text{ для } \lambda < \lambda''. \end{aligned} \right\} (35,3)$$

Если же рассматривать точки, для которых  $\xi < 1$ ,  $\eta < 1$ ,  $\xi^2 + \eta^2 > 1$ , то, как нетрудно проверить, прямая, определенная вторым из уравнений (31,3), не может проходить через эти точки ни при каких значениях  $\lambda > 1$ . Это значит, что при таких  $\xi$  и  $\eta$  второе из уравнений (28,3) не имеет вещественного корня, большего единицы, и всегда выполняется неравенство

$$\frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} > \rho \text{ для } \lambda > 1. (36,3)$$

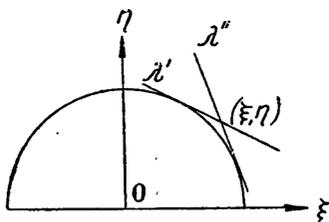


Рис. 6

Что же касается прямой, определенной первым из уравнений (31,3), то непосредственно из рис. 6 убеждаемся в том, что эта прямая, поворачиваясь при изменении  $\lambda$  от 1 до  $\infty$ , дважды пересекает рассматриваемые точки. Следовательно

первое из уравнений (28,3) имеет при таких  $\xi$  и  $\eta$  два вещественных корня, больших единицы. Корни эти определяются по формулам (32,3) и (34,3).

Вследствие этого при  $\xi < 1$ ,  $\eta < 1$ ,  $\xi^2 + \eta^2 > 1$  можно написать следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} > \rho, \text{ для } \lambda > \lambda' \text{ и } \lambda < \lambda''; \\ \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} < \rho, \text{ для } \lambda'' < \lambda < \lambda'. \end{aligned} \right\} (37,3)$$

На границе полупространства  $z = 0$ , а также в точках, удовлетворяющих равенству  $z^2 + \rho^2 = \frac{t^2}{b^2}$ , корни  $\lambda'$  и  $\lambda''$  совпадают.

Рассмотрим теперь значения  $q_{\lambda\phi}$  и  $w_{\lambda\phi}$  в области II. Выполняя интегрирование по  $k$  в тех же первых трех интегралах каждой из формул (14,3) с учетом неравенств (33,3) и (35,3) и совершая предельный переход при  $n \rightarrow \infty$ , находим для  $\xi > 1$ ,  $\eta < 1$ ,  $\xi^2 + \eta^2 > 1$ :

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda\phi II} = & -\frac{2}{\pi^2\mu\rho} \int_1^{\frac{1}{\gamma^2}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} d\lambda + \\
 & + \frac{1}{\pi^2\mu\rho} \int_{\lambda'}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \cdot \frac{\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\left(\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2 - \rho^2}} d\lambda + \\
 & + \frac{1}{\pi^2\mu\rho} \int_{\lambda''}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{\frac{t}{b}\lambda + z\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\left(\frac{t}{b}\lambda + z\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2 - \rho^2}} d\lambda + \\
 & + \frac{4}{\pi^2\mu\rho} \int_1^{\lambda'} \frac{(\lambda^2-1)(1-\gamma^2\lambda^2)}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}} d\lambda - \\
 & - \frac{4}{\pi^2\mu\rho} \int_1^{\lambda''} \frac{(\lambda^2-1)(1-\gamma^2\lambda^2)}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{\frac{t}{b}\lambda + z\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b}\lambda + z\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}} d\lambda,
 \end{aligned} \tag{38,3}$$

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda\Pi} = & -\frac{4}{\pi^2\mu} \int_1^{\lambda'} \frac{(1-\gamma^2\lambda^2)\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}} - \frac{4}{\pi^2\mu} \int_1^{\lambda''} \frac{(1-\gamma^2\lambda^2)\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b}\lambda + z\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}} - \frac{1}{\pi^2\mu} \int_{\gamma'}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2\sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2 - \rho^2}} + \\
 & + \frac{1}{\pi^2\mu} \int_{\lambda''}^{\frac{1}{\lambda'}} \frac{(2-\lambda^2)^2\sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2 - \rho^2}}.
 \end{aligned} \tag{38,3}$$

Если же рассматривать точки, расположенные в области:  $\xi < 1$ ,  $\eta < 1$ ,  $\xi^2 + \eta^2 > 1$ , то, вследствие неравенств (36,3) и (37,3), получим вместо (38,3) следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda\Pi} = & -\frac{2}{\pi^2\mu\rho} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} d\lambda + \\
 & + \frac{1}{\pi^2\mu\rho} \int_1^{\lambda''} \frac{(2-\lambda^2)^2\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\left(\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2-1}\right)^2 - \rho^2}} d\lambda +
 \end{aligned} \tag{39,3}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\pi^2 \mu \rho} \int_{\lambda'}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1}\right)^2 - \rho^2}} d\lambda + \\
 & + \frac{1}{\pi^2 \mu \rho} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{\frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\left(\frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1}\right)^2 - \rho^2}} d\lambda +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{\pi^2 \mu \rho} \int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{(\lambda^2-1)(1-\gamma^2 \lambda^2)}{\lambda P(\lambda)} \cdot \frac{\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1}}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}} d\lambda,$$

(39,3)

$$\omega_{\lambda \Phi II} = - \frac{4}{\pi^2 \mu} \int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{(1-\gamma^2 \lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda P(\lambda)} \times$$

$$\times \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1}\right)^2}} -$$

$$- \frac{1}{\pi^2 \mu} \int_1^{\lambda''} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times$$

$$\times \frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1}\right)^2 - \rho^2}}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\pi^2 \mu} \int_{\lambda'}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \rho^2}} + \\
 & + \frac{1}{\pi^2 \mu} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \rho^2}}.
 \end{aligned} \tag{39,3}$$

8. Перейдем к исследованию полученных формул. Прежде всего заметим, что при  $\xi=1$  (38,3) и (39,3) совпадают, так как в этом случае  $\lambda''=1$ .

Если воспользоваться неравенствами (36,3) и (37,3) и из (14,3) определить в области III значения  $q_{\lambda\phi III}$  и  $w_{\lambda\phi III}$ , аналогично тому, как определялись значения  $q_{\lambda\phi II}$  и  $w_{\lambda\phi II}$  в области II, то увидим, что на границе областей II и III эти значения будут совпадать с  $q_{\lambda\phi II}$  и  $w_{\lambda\phi II}$ , а на границе областей I и III они отличаются от  $q_{\lambda\phi I}$  и  $w_{\lambda\phi I}$  на величины

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda\phi III} - q_{\lambda\phi I} &= \lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow 1+0} \frac{1}{\pi^2 \mu \rho} \int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{\lambda Q(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2}} d\lambda; \\
 w_{\lambda\phi III} - w_{\lambda\phi I} &= \lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow 1+0} \frac{1}{\pi^2 \mu} \int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{\sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1}}{\lambda Q(\lambda)} \times \\
 & \times \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2}} d\lambda.
 \end{aligned} \tag{40,3}$$

Ввиду непрерывности на рассматриваемых границах всех остальных слагаемых, на которые оказалось разбитым все поле смещений, можно заключить, что на участке фронта поперечной волны, определенном прямой

$$\frac{1}{\lambda} - \eta \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1} - \xi = 0,$$

смещения меняются непрерывно при переходе из области II в область III. Что же касается участка фронта  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ ,  $\xi < \gamma$ , то при переходе через поверхность фронта смещения здесь будут иметь разрыв, равный пределам (40,3). На основании п. 6 можно утверждать, что на участке фронта поперечной волны, определенном упомянутой прямой, смещения, определяемые векторным потенциалом, равны нулю, а на остальном участке фронта эти смещения равны пределам (40,3).

Значения (40,3) в общем случае будут отличны от нуля, так как одновременно с уменьшением промежутка интегрирования ( $\lambda''$ ,  $\lambda'$ ) (на окружности  $\xi^2 + \eta^2 = 1$   $\lambda''$  и  $\lambda'$  совпадают) усиливается особенность подинтегральной функции. Они оказываются равными нулю лишь в точке  $\xi = \gamma$ ,  $\eta = \sqrt{1 - \gamma^2}$ , в которой  $\lambda' = \lambda'' = \frac{1}{\gamma}$  и в точке  $\xi = 0$ ,  $\eta = 1$ , когда  $\lambda' = \lambda'' = \infty$ .

Сопоставим теперь значения формул (39,3) и (30,3) вблизи границы, разделяющей области I и II. Нетрудно видеть, что некоторые из интегралов, фигурирующих в этих формулах, неограниченно возрастают по логарифмическому закону, если точка  $(\xi, \eta)$  приближается к упомянутой границе. В этом можно легко убедиться, применяя обобщенную теорему о среднем. Например, во второй из формул (39,3) для интеграла с пределами интегрирования (1,  $\lambda''$ ) [в котором мы перейдем к переменным (17,3)] при  $\lambda'' < \sqrt{2}$  получается оценка:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^2 \mu} \frac{t}{b} \int_1^{\lambda''} \frac{(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - \eta \sqrt{\lambda^2 - 1})^2 - \xi^2}} = \\ & = \frac{1}{\pi^2 \mu} \frac{t}{b} \frac{(2 - \lambda_0^2)^2 \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda_0^2} \sqrt{\lambda_0 + \eta \sqrt{\lambda_0^2 - 1} - \xi}}{\lambda_0 P(\lambda_0) \sqrt{\lambda_0 - \eta \sqrt{\lambda_0^2 - 1} + \xi} \sqrt{1 - \eta^2}} \times \\ & \quad \times \ln \frac{\eta \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 1}}{\eta^2 - (1 - \xi)(1 + \sqrt{1 - \eta^2})}, \end{aligned}$$

в которой  $1 \leq \lambda_0 \leq \lambda''$  и множитель при логарифме есть, следовательно, функция, ограниченная сверху и снизу положительными постоянными.<sup>1</sup> Все же остальные интегралы формул (30,3), кроме указанных, при переходе точки  $(\xi, \eta)$  из области I в область II непрерывно переходят в такие же интегралы формул (39,3). Кроме того, в каждой из формул (39,3) остается еще по одному конечному интегралу с промежутком интегрирования  $(\lambda'', \lambda')$ , значения которых на границе, разделяющей области I и II, определяются пределами.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow 1+0} \frac{4}{\pi^2 \mu \rho} \int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{(\lambda^2 - 1)(1 - \gamma^2 \lambda^2)}{\lambda P(\lambda)} \cdot \frac{\left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right) d\lambda}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2}}, \\ \lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow 1+0} \frac{4}{\pi^2 \mu} \int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{(1 - \gamma^2 \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda P(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} (41,3)$$

Значения (41,3) так же, как и (40,3), в общем случае отличны от нуля. Они обращаются в нуль лишь в точке  $\xi = 1$ ,  $\eta = 0$ , когда  $\lambda' = \lambda'' = 1$ , и в точке  $\xi = \gamma$ ,  $\eta = \sqrt{1 - \gamma^2}$ , когда  $\lambda' = \lambda'' = \frac{1}{\gamma}$ .

Так же, как и на фронте поперечной волны, нетрудно установить разрывы в смещениях на фронте продольной волны. Разрывы эти должны равняться самим смещениям. Они определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} q = \lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} + 0} \frac{-1}{2\pi^2 \mu \rho} \int_{\lambda''}^{\lambda'} \frac{2 - \lambda^2}{\lambda Q(\lambda)} \times \\ \times \frac{\left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1}\right) d\lambda}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1}\right)^2}}. \end{aligned} \right\} (42,3)$$

<sup>1</sup> В общем случае для доказательства наличия логарифмической особенности можно применить, например, обобщенную теорему о среднем к интегралам по промежуткам  $(\lambda'' - \varepsilon, \lambda'')$ ,  $(\lambda', \lambda' + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ .

$$w = \lim_{\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} + 0} \frac{-1}{2\pi^2\mu} \int_{\lambda''_{\gamma}}^{\lambda'_{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2) \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1}}{\lambda Q(\lambda)} \times \left. \right\} (42,3)$$

$$\times \frac{d\lambda}{\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1}\right)^2}},$$

в которых

$$\lambda'_{\gamma} = \frac{\frac{t}{b} \rho + z \sqrt{\gamma^2 (\rho^2 + z^2) - \frac{t^2}{b^2}}}{\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2 z^2}, \quad (43,3)$$

$$\lambda''_{\gamma} = \frac{\frac{t}{b} \rho - z \sqrt{\gamma^2 (\rho^2 + z^2) - \frac{t^2}{b^2}}}{\frac{t^2}{b^2} - \gamma^2 z^2},$$

а  $Q(\lambda)$  имеет значение (16,3).

Составляющие поля упругих смещений (42,3) равны нулю в точке  $\xi = \frac{1}{\gamma}$ ,  $\eta = 0$ , в которой  $\lambda''_{\gamma} = \lambda'_{\gamma} = \frac{1}{\gamma}$ . Также равна нулю горизонтальная составляющая  $q$  и в точке  $\xi = 0$ ,  $\eta = \frac{1}{\gamma}$ , где  $\lambda''_{\gamma} = \lambda'_{\gamma} = \infty$ . Во всех остальных точках фронта продольной волны  $q$  и  $w$  отличны от нуля. Не представляло бы труда убедиться в правильности высказанных утверждений, касающихся пределов (40,3), (41,3) и (42,3). Но мы не будем сейчас останавливаться на этом вопросе.

Проведенные исследования вблизи характеристик  $\xi^2 + \eta^2 = 1$  и  $\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$  приводят нас к следующим выводам. Конечные значения смещений на фронтах волн и бесконечные значения смещений на границе раздела областей I и II позволяют утверждать, что последние вызваны поперечными волнами, возбужденными при отражении продольных волн от границы полупространства. Наличие же конечных пределов (41,3) можно объяснить проявлением эффекта наложения поперечных волн, распространяющихся прямо от источника и дающих на границе раздела областей I и II конечные разрывы, подобные тем, которые были получены на границе раздела областей II и III.

9. Исследуем теперь асимптотическое поведение наших решений при  $t \gg 1$ . Первые два слагаемых в (2,3) нами уже исследованы достаточно подробно; остается рассмотреть лишь третьи слагаемые  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$ . За основные формулы для изучения их при больших  $t$  возьмем (18,3), (21,3), (22,3), (30,3), (38,3).

При фиксированных  $\rho$  и  $z$  и больших  $t$  разложим (22,3) и (30,3) в ряды по степеням  $\frac{1}{t}$ . Оставив лишь первое слагаемое в каждом из этих рядов, получим из (18,3) для  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$  следующие главные части:

$$\left. \begin{aligned} q_\lambda &\sim -\frac{1}{\pi^2 \mu} \cdot \frac{b^2 \rho}{t^2} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{\lambda^3 P(\lambda)} d\lambda; \\ w_\lambda &\sim \frac{2(1 - 2\gamma^2)}{\pi^2 \mu} \cdot \frac{b^2 z}{t^2} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{\lambda^3 P(\lambda)} d\lambda. \end{aligned} \right\} (44,3)$$

При каком-либо фиксированном значении  $\gamma$  эти интегралы нетрудно вычислить. Сравнивая (11,3) и (44,3), легко было бы установить относительную величину их правых частей при  $t \gg 1$ . Кроме того, из этих формул заключаем, что в любой фиксированной точке  $(\rho, z)$  полупространства упругие возмущения стремятся к стационарным значениям (3,3), как  $\frac{c(\rho, z)}{t^2}$ . Заметим, что величину  $c(\rho, z)$  было бы нетрудно оценить.

Исследуем теперь убывание  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$  с точки зрения движущегося с произвольной радиальной скоростью наблюдателя. Допустим сперва, что эта скорость меньше скорости поперечных волн. Тогда в обычной замене переменной

$$\rho = \lambda^* \cdot \frac{t}{b} - m \quad (45,3)$$

$\lambda^*$  должно быть меньше единицы. Подставляя (45,3) в формулы (22,3) и выделяя главные части их при больших  $t$ , получим

$$\left. \begin{aligned}
 q_{\lambda\phi I} &\sim \frac{4}{\pi^2\mu \left(\frac{t}{b}\lambda^* - m\right)} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\lambda^{*2}}}\right) d\lambda, \\
 w_{\lambda\phi I} &\sim \frac{4z}{\pi^2\mu \frac{t^2}{b^2}} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)(1-\gamma^2\lambda^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\lambda^2-1}}{P(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{(\lambda^2-\lambda^{*2})^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned} \right\} (46,3)$$

Аналогичная замена переменной в (30,3) дает для этих формул следующие главные части:

$$\left. \begin{aligned}
 q_{\lambda\phi I} &\sim -\frac{2}{\pi^2\mu \frac{t}{b}\lambda^*} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\lambda^{*2}}}\right) d\lambda, \\
 w_{\lambda\phi I} &\sim -\frac{2z}{\pi^2\mu \frac{t}{b}} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{P(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{(\lambda^2-\lambda^{*2})^{\frac{3}{2}}}.
 \end{aligned} \right\} (47,3)$$

Если скорость движущегося наблюдателя превышает скорость поперечных волн, то  $\lambda^*$  будет больше единицы. В этом случае смещения необходимо исследовать в области II при  $\xi > 1$ . Заметим, что при замене (45,3) и  $\lambda^* > 1$  выделение главной части формул (21,3) и (38,3) при помощи разложения в ряды подинтегральных функций по степеням  $\frac{1}{\lambda}$  оказывается невозможным, так как эти ряды не допускают почленного интегрирования по  $\lambda$ . Для преодоления этой трудности, представим  $q_{\lambda II}$  и  $w_{\lambda II}$  в несколько другой форме. Выполним интегрирование по  $k$  в формулах (14,3) и перейдем к пределу  $n \rightarrow \infty$  лишь в интегралах по промежутку  $\left(\frac{1}{\gamma}, \infty\right)$ . В результате получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda II} = & -\frac{1}{\pi^2 \mu} \left\{ \operatorname{Re} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \left[ \frac{2}{\rho} - \right. \right. \\
 & \frac{\frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right)}{\rho \sqrt{\rho^2 + \left[ \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right]^2}} - \\
 & \left. \frac{\frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right)}{\rho \sqrt{\rho^2 + \left[ \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right]^2}} \right] d\lambda + \\
 & + \operatorname{Im} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{4(\lambda^2-1)(1-\gamma^2 \lambda^2)}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \times \left[ \frac{\frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right)}{\sqrt{\rho^2 + \left[ \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right]^2}} - \right. \\
 & \left. \frac{\frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right)}{\sqrt{\rho^2 + \left[ \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right]^2}} \right] d\lambda - \\
 & - \operatorname{Re} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{4(2-\lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \left[ \frac{1}{\rho} - \right. \\
 & \left. \frac{\frac{1}{n} + z \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2} - i \frac{t}{b} \lambda}{\rho \sqrt{\rho^2 + \left( \frac{1}{n} + z \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2} - i \frac{t}{b} \lambda \right)^2}} \right] d\lambda \left. \right\}; \\
 \omega_{\lambda II} = & -\frac{1}{\pi^2 \mu} \left\{ \operatorname{Re} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{4(1-\gamma^2 \lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda P(\lambda)} \times \right. \\
 & \times \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left[ \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right]^2}} + \right.
 \end{aligned}
 \tag{48,3}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left[ \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right]^2}} d\lambda + \\
 & \quad + \operatorname{Im} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \quad \times \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left[ \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right]^2}} - \right. \\
 & \quad - \left. \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left[ \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right]^2}} \right] d\lambda - \\
 & \quad - \operatorname{Re} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{4(2 - \lambda^2)(1 - \gamma^2 \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda P(\lambda)} \times \\
 & \quad \times \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left( \frac{1}{n} + z \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2} - i \frac{t}{b} \lambda \right)^2}} d\lambda \left. \right\}. \tag{48,3}
 \end{aligned}$$

Если ввести плоскость комплексной переменной  $\lambda$  с разрезами, проведенными из точек  $\lambda = \pm 1$ ,  $\lambda = \pm \frac{1}{\gamma}$  на бесконечность параллельно отрицательной части мнимой оси, то подинтегральные выражения в (48,3) будут аналитическими функциями в такой плоскости. Нетрудно проверить, что выражения, стоящие под радикалами в знаменателях формул (48,3), могут иметь лишь по одному комплексному корню, расположенному в верхней или нижней полуплоскости вблизи точек вещественной оси, удовлетворяющих неравенству  $1 \leq \lambda \leq \frac{1}{\lambda}$ , и стремящемуся при  $n \rightarrow \infty$  к одной из этих точек. Деформируем контур интегрирования, соединяющий точки 1 и  $\frac{1}{\gamma}$  (не меняя его концов), в ту полуплоскость, в которой нет такого корня. Контур этот можно выбрать, например, так, что его точки определяются равенством

$$\lambda = u \pm z(u - 1) \left( \frac{1}{\gamma} - u \right), \tag{49,3}$$

в котором вещественная переменная  $u$  изменяется в промежутке  $1 \leq u \leq \frac{1}{\gamma}$ , а  $x$  — какая-то постоянная. Переходя затем в (48,3) к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим интегралы по некоторой комплексной переменной (49,3), которые можно исследовать в области II точно так же, как это имело место для (21,3) и (30,3) в области I. Особенности подинтегральных функций, возникающие при совпадении упомянутого корня с концами промежутка  $(1, \frac{1}{\gamma})$ , оказываются при этом интегрируемыми [когда мы будем делать подстановку (45,3) и выделять главные части при больших  $t$ ]. Главные части (48,3) при  $\lambda^* > 1$ , как и (22,3), (30,3) при  $\lambda^* < 1$ , оказываются убывающими не медленнее, чем  $t^{-1}$ .

Аналогичный закон убывания  $q_0$  и  $\omega_0$  при любых  $\lambda^*$  и  $q_R$  и  $\omega_R$  при любых  $\lambda^* \neq v_R$  (где  $v_R$  — скорость точки максимума поверхностной волны) мы получили ранее.

10. Результаты исследования настоящего параграфа позволяют сделать вывод, что каждое из слагаемых (2,3) имеет свой физический смысл. Первое из них представляет статическое решение, смысл которого совершенно очевиден. Второе дает главную часть колебаний, распространяющихся со скоростью волн Релея, и представляет собой нестационарные поверхностные волны Релея. Третье же слагаемое дает возмущения, характеризующие продольные и поперечные волны. Поверхностные волны, определенные вторыми слагаемыми, не имеют разрывов внутри полупространства. Третьи же слагаемые  $q_\lambda$ ,  $\omega_\lambda$ , наоборот, не имеют разрывов на границе полупространства. Внутри полупространства разрывы в этих слагаемых характеризуют все возможные разрывы в смещениях.

Представление решения в виде трех слагаемых (2,3) и последующее представление третьего слагаемого для различных областей возмущенной среды через интегралы с вещественной переменной интегрирования дало возможность исследовать всю качественную картину возмущений в полупространстве. Но этим не исчерпывается значение указанных формул. Они могут оказаться весьма полезными и при приближенном вычислении смещений в различных точках возмущенной среды в произвольный момент времени  $t$ . Кроме сказанного, из этих формул легко получается простая точная формула для определения вертикальной составляющей смещений на границе полупространства, а также получаются весьма простые формулы для определения величины упоми-

навшихся конечных разрывов. Последние, правда, могут быть получены и непосредственно из формул (18,1).

#### § 4. Граничное воздействие типа импульса

Рассмотрим теперь случай единичного сосредоточенного импульса, приложенного к границе полупространства. Для исследования решения этой задачи удобно исходить из формул (16,1), (14,1), определяющих скалярный  $\varphi$  и векторный  $\psi$  потенциалы.

Пересекая особые точки  $\zeta=0$ ,  $\zeta=\pm i\vartheta$ , деформируем в формулах (14,1) путь интегрирования  $\text{Re } \zeta = \sigma$  в контур, охватывающий разрезы  $(i, i\infty)$ ,  $(-i, -i\infty)$ . Тогда потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  представятся, подобно (2,3), в виде сумм трех слагаемых

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_R + \varphi_\lambda; \quad (1,4)$$

$$\psi = \psi_0 + \psi_R + \psi_\lambda, \quad (2,4)$$

в которых  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  соответствуют вычетам в точке  $\zeta=0$ ,  $\varphi_R$  и  $\psi_R$  — суммам вычетов в простых корнях  $\zeta = \pm i\vartheta$  уравнения Релея (1,3), а  $\varphi_\lambda$  и  $\psi_\lambda$  — интегралам, распространенным по контурам, охватывающим упомянутые разрезы.

Согласно (1,4) и (2,4) поле, смещений, определяемое по формулам (3,1), также выразится суммой трех слагаемых

$$q = q_0 + q_R + q_\lambda; \quad (3,4)$$

$$w = w_0 + w_R + w_\lambda, \quad (4,4)$$

исследование которых удобно производить отдельно. Следует подчеркнуть, что удобство такого метода исследования заключается в его простоте, а также в том, что при  $n \rightarrow \infty$  каждое из слагаемых (3,4) и (4,4) обладает особенностями, позволяющими придавать им различный физический смысл.

Как и в § 3, при рассмотрении случая  $n \rightarrow \infty$  удобно разбивать всю область возмущения на качественно различные области: I, II и III (рис. 4), в которых слагаемые из (3,4) и (4,4) могут представляться различными формулами.

При  $n \rightarrow \infty$  в области III возмущение определяется лишь скалярным потенциалом  $\varphi$ . Поэтому (при  $n \rightarrow \infty$ ) в упомя-

нутой области поле упругих смещений можно представлять формулами

$$q_{III} = q_{0III} + q_{RIII} + q_{LIII}; \quad (5,4)$$

$$w_{III} = w_{0III} + w_{RIII} + w_{LIII}, \quad (6,4)$$

слагаемые в которых определяются только по потенциалу  $\varphi$ .

1. Определение первых слагаемых формул (1,4) и (2,4) приводит нас к выражениям

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= - \frac{t}{2\pi\mu b^2 (1-\gamma^2)} \int_0^\infty k e^{-k\left(z+\frac{1}{n}\right)} J_0(k\rho) dk = \\ &= - \frac{\left(\frac{1}{n} + z\right) t}{2\pi\mu b^2 (1-\gamma^2) \left[\left(\frac{1}{n} + z\right)^2 + \rho^2\right]^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned} \quad (7,4)$$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= - \frac{t}{2\pi\mu b^2 (1-\gamma^2)} \int_0^\infty k e^{-k\left(z+\frac{1}{n}\right)} J_1(k\rho) dk = \\ &= - \frac{\rho t}{2\pi\mu b^2 (1-\gamma^2) \left[\left(\frac{1}{n} + z\right)^2 + \rho^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (8,4)$$

которые дают для компонент поля упругих смещений следующий очевидный результат:

$$q_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi_0}{\partial z} = 0; \quad w_0 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \psi_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} = 0. \quad (9,4)$$

Уже упоминалось о том, что при  $n \rightarrow \infty$  в области III можно пользоваться другим способом разбиения возмущения на три части и можно не учитывать значений векторного потенциала. Если поступать таким образом, то для

составляющих  $q_{\text{ош}}$  и  $w_{\text{ош}}$  из (5,4) и (6,4) получатся следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{ош}} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} = \frac{3\rho z t}{2\pi\mu b^2 (1-\gamma^2) (z^2 + \rho^2)^{\frac{5}{2}}}, \\ w_{\text{ош}} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = \frac{t}{2\pi\mu b^2 (1-\gamma^2)} \left( \frac{3z^2}{(z^2 + \rho^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(z^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned} \right\} (10,4)$$

2. Перейдем теперь к изучению возмущений, даваемых потенциалами  $\varphi_R$  и  $\psi_R$ . Эти потенциалы, соответствующие суммам вычетов в простых корнях  $\zeta = \pm i\vartheta$  уравнения Релея, имеют значения

$$\left. \begin{aligned} \varphi_R &= \frac{1}{4\pi\mu b \vartheta c_0} \int_0^\infty (2 - \vartheta^2) e^{-k\left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n}\right)} \times \\ &\quad \times \sin k \frac{t}{b} \vartheta J_0(k\rho) dk, \\ \psi_R &= \frac{1}{4\pi\mu b \vartheta c_0} \int_0^\infty 2\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} e^{-k\left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n}\right)} \times \\ &\quad \times \sin k \frac{t}{b} \vartheta J_1(k\rho) dk, \end{aligned} \right\} (11,4)$$

где  $c_0$  определяется по (5,3).

Для смещений  $q_R$  и  $w_R$  из (3,1) сперва получаем

$$\left. \begin{aligned} q_R &= \frac{1}{4\pi\mu b \vartheta c_0} \int_0^\infty \left[ (2 - \vartheta^2) e^{-k\left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n}\right)} \times \right. \\ &\quad \times \sin k \frac{t}{b} \vartheta - 2\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} \sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} e^{-k\left(z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n}\right)} \times \\ &\quad \left. \times \sin k \frac{t}{b} \vartheta \right] J_1(k\rho) dk, \end{aligned} \right\} (12,4)$$

$$\begin{aligned}
 w_R = & \frac{1}{4\pi\mu b \vartheta c_0} \int_0^\infty \left[ (2 - \vartheta^2) \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \times \right. \\
 & \times e^{-k \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)} \sin k \frac{t}{b} \vartheta - 2 \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \times \\
 & \left. \times e^{-k \left( z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)} \sin k \frac{t}{b} \vartheta \right] J_0(k\rho) dk.
 \end{aligned} \quad (12,4)$$

Выполняя же интегрирование по  $k$ , находим, что  $q_R$  и  $w_R$  определяются формулами

$$\begin{aligned}
 q_R = & \frac{\rho}{4\pi\mu b \vartheta c_0} \times \\
 & \times \operatorname{Im} \left\{ \frac{2 - \vartheta^2}{\left[ \left( -i \frac{t}{b} \vartheta + z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
 & \left. \frac{2 \sqrt{1 - \vartheta^2} \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{\left[ \left( -i \frac{t}{b} \vartheta + z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\}, \\
 w_R = & \frac{1}{4\pi\mu b \vartheta c_0} \times \\
 & \times \operatorname{Im} \left\{ \frac{(2 - \vartheta^2) \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \left( -i \frac{t}{b} \vartheta + z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)}{\left[ \left( -i \frac{t}{b} \vartheta + z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
 & \left. \frac{2 \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \left( -i \frac{t}{b} \vartheta + z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)}{\left[ \left( -i \frac{t}{b} \vartheta + z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\},
 \end{aligned} \quad (13,4)$$

которые, <sup>1</sup> после выделения мнимой части, можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 q_R = \frac{\rho}{4\pi\mu b \vartheta c_0} & \left\{ (2 - \vartheta^2) \frac{\sin \frac{3}{2} \theta_\gamma(\vartheta)}{[R_\gamma(\vartheta)]^{\frac{3}{4}}} - \right. \\
 & \left. - 2\sqrt{1 - \vartheta^2} \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \frac{\sin \frac{3}{2} \theta_1(\vartheta)}{[R_1(\vartheta)]^{\frac{3}{4}}} \right\}, \\
 \omega_R = \frac{1}{4\pi\mu \vartheta c_0} & \left\{ (2 - \vartheta^2) \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \times \right. \\
 & \times \frac{\left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{3}{2} \theta_\gamma(\vartheta) + \frac{t}{b} \vartheta \cos \frac{3}{2} \theta_\gamma(\vartheta)}{[R_\gamma(\vartheta)]^{\frac{3}{4}}} - \\
 & - 2\sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \times \\
 & \left. \times \frac{\left( z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{3}{2} \theta_1(\vartheta) + \frac{t}{b} \vartheta \cos \frac{3}{2} \theta_1(\vartheta)}{[R_1(\vartheta)]^{\frac{3}{4}}} \right\}, \quad (14,4)
 \end{aligned}$$

при условии, что значения  $R_\gamma$ ,  $R_1$ ,  $\theta_\gamma$ ,  $\theta_1$  берутся из (9,3), (10,3). Заметим, что при переходе к сосредоточенному воздействию здесь (так же как и в других окончательных формулах) необходимо полагать  $n = \infty$ .

Согласно нашему способу представления составляющих упругого поля смещений в виде сумм трех слагаемых, полученных либо от обоих потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$ , либо (в области III при  $n \rightarrow \infty$ ) только от скалярного потенциала  $\varphi$ , последние формулы при  $n \rightarrow \infty$  следует применять лишь в области позади фронта поперечных волн. В области же

<sup>1</sup> Заметим, что для нижеследующего нет необходимости выписывать в явном виде условия, фиксирующие ветви многозначных функций, стоящих в знаменателях формул (13,4). Эта фиксация производится так, чтобы из (13,4) вытекали формулы (14,4), в которых произвол уже исключен.

III (между фронтами волн) для  $q_{RIII}$  и  $w_{RIII}$  из (6,4) и (7,4) мы получим формулы, оставив в (15,4) лишь первые слагаемые (считая в них  $n = \infty$ ). Это дает

$$\begin{aligned}
 q_{RIII} &= -\frac{(2 - \vartheta^2) \rho}{4\pi\mu b \vartheta c_0} \cdot \frac{\sin \frac{3}{2} \theta_\gamma(\vartheta)}{[R_\gamma(\vartheta)]^{\frac{3}{4}}}, \\
 w_{RIII} &= \frac{(2 - \vartheta^2) \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{4\pi\mu b \vartheta c_0} \times \\
 &\times \frac{z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \sin \frac{3}{2} \theta_\gamma(\vartheta) + \frac{t}{b} \vartheta \cos \frac{3}{2} \theta_\gamma(\vartheta)}{[R_\gamma(\vartheta)]^{\frac{3}{4}}}.
 \end{aligned}
 \tag{15,4}$$

Обратимся теперь к исследованию смещений поля поверхностных волн из (13,4) или (14,4). При этом мы прежде всего выделим из (14,4) главные части, соответствующие фиксированным значениям  $\rho$  и  $z$  и достаточно большим моментам времени  $t$ .

Не представляет труда убедиться в том, что упомянутые главные части релеевских смещений имеют вид.

$$\begin{aligned}
 q_R &\sim -\frac{(2 - \vartheta^2) b^2}{8\pi\mu \vartheta^2 c_0} \cdot \frac{\rho}{t^3}, \\
 w_R &\sim \frac{b^2}{2\pi\mu \vartheta^4 c_0} \cdot \frac{1}{t^3} \times \\
 &\times \left\{ (2 - \vartheta^2) \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \left( z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right) - \right. \\
 &\left. - 2 \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \left( z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n} \right) \right\},
 \end{aligned}
 \tag{16,4}$$

откуда следует, что при  $t \rightarrow \infty$   $q_R$  и  $w_R$  убывают в фиксированной точке пространства, как  $t^{-3}$ .

Определим теперь главные части поверхностных волн с точки зрения наблюдателя, движущегося с произвольной радиальной скоростью вдоль поверхности полупространства. Для этого, как и прежде, введем новую переменную  $m$  по формуле (45,3). Тогда, при больших  $t$ , главная часть (14,4) определится следующими тремя формулами, в зависимости от того, каково  $\lambda^*$ :

При  $\lambda^* < \vartheta$  будет:

$$\begin{aligned}
 q_R &\sim \frac{b(2-\vartheta^2)\vartheta\lambda^*}{8\pi\mu c_0(\vartheta^2-\lambda^{*2})^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{t^2}, \\
 w_R &\sim \frac{-b^2(2\vartheta^2+\lambda^{*2})}{4\pi\mu c_0(\vartheta^2-\lambda^{*2})^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{1}{t^3} \times \\
 &\times \left[ (2-\vartheta^2)\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} \left( z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} \left( z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{17,4}$$

При  $\lambda^* > \vartheta$  будет:

$$\begin{aligned}
 q_R &\sim \frac{-\lambda^*b^2}{2\pi\mu c_0(\lambda^{*2}-\vartheta^2)^{\frac{5}{2}} t^3} \times \\
 &\times \left[ (2-\vartheta^2) \left( z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} + \frac{1}{n} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\sqrt{1-\vartheta^2} \sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} \left( z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n} \right) \right], \\
 w_R &\sim \frac{-b\vartheta^2\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{4\pi\mu c_0(\lambda^{*2}-\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{t^2}.
 \end{aligned} \tag{18,4}$$

И, наконец, при  $\lambda^* = \vartheta$  будем иметь:

$$\begin{aligned}
 q_R &\sim \frac{1}{8\sqrt{2\pi\mu}\vartheta c_0} \sqrt{\frac{t}{\vartheta}} \frac{1}{b} \left\{ \frac{2-\vartheta^2}{\left[ m^2 + \left( \frac{1}{n} + z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2} \right) \right]^{\frac{3}{4}}} \times \right. \\
 &\quad \times \sin \frac{3}{2} \arctg \frac{z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{m} + \frac{1}{n} - \\
 &\quad - \frac{2\sqrt{1-\vartheta^2} \sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{\left[ m^2 + \left( \frac{1}{n} + z\sqrt{1-\vartheta^2} \right) \right]^{\frac{3}{4}}} \times \\
 &\quad \left. \times \sin \frac{3}{2} \arctg \frac{z\sqrt{1-\vartheta^2} + \frac{1}{n}}{m} \right\},
 \end{aligned} \tag{19,4}$$

$$\omega_R \sim \frac{1}{8\sqrt{2\pi} \mu b \vartheta c_0 \sqrt{\vartheta \frac{t}{b}}} \left\{ \frac{(2 - \vartheta^2) \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{\left[ m^2 + \left( \frac{1}{n} + z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{4}}} \times \right. \\
 \times \cos \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{z \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2} + \frac{1}{n}}{m} \\
 \left. - \frac{2 \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}}{\left[ m^2 + \left( \frac{1}{n} + z \sqrt{1 - \vartheta^2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{4}}} \times \right. \\
 \left. \times \cos \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{z \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{1}{n}}{m} \right\}. \quad (19,4)$$

При постоянном  $z > 0$  смещения (19,4), рассматриваемые как функции  $m$ , можно иллюстрировать рис. 7 и 8.

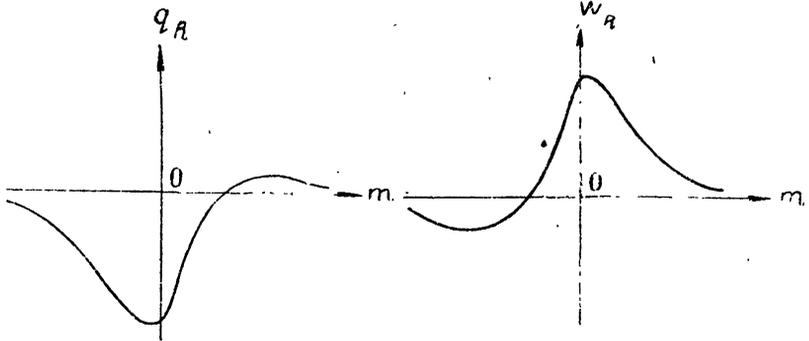


Рис. 7

Рис. 8

Мы уже видели в (19,4), что за фронтом поперечной волны величины  $q_0$  и  $w_0$  равны нулю. Из дальнейшего будет следовать, что с точки зрения движущегося с произвольной радиальной скоростью наблюдателя величины  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$  убывают значительно быстрее, нежели (19,4). Это обстоятельство и позволит нам считать  $q_R$  и  $w_R$  главными частями возмущения при  $t \gg 1$ .

3. Рассмотрим теперь часть смещений, даваемую интегралами, контур интегрирования которых обходит разрезы. Переходя к интегралам с вещественной переменной интегри-

рования, нетрудно получить для потенциалов, дающих эту часть смещений, следующие выражения:

Для скалярного потенциала:

$$\varphi_\lambda = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (20,4)$$

где

$$\varphi_1 = -\frac{4}{b \mu \pi^2} \int_0^\infty \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{P(\lambda)} \times \right. \\ \left. \times e^{-k \left( z \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2} + \frac{1}{n} \right)} \sin k \frac{t}{b} \lambda d\lambda \right\} J_0(k\rho) dk, \quad (21,4)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2b\mu\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \int_{\frac{1}{\gamma}}^\infty \frac{2-\lambda^2}{Q(\lambda)} \left[ \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1} \right) \right] d\lambda \right\} e^{-\frac{k}{n}} J_0(k\rho) dk, \quad (22,4)$$

и для векторного потенциала:

$$\psi_\lambda = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad (23,4)$$

где

$$\psi_1 = \frac{1}{b \mu \pi^2} \int_0^\infty \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2) \sqrt{1-\gamma^2 \lambda^2}}{P(\lambda)} \left[ \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda \right\} e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk; \quad (24,4)$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{b \mu \pi^2} \int_0^\infty \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\sqrt{\lambda^2-1} (1-\gamma^2 \lambda^2)}{P(\lambda)} \left[ \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda \right\} e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk; \quad (25,4)$$

$$\psi_3 = -\frac{1}{b \mu \pi^2} \int_0^\infty \left\{ \int_{\frac{1}{\gamma}}^\infty \frac{\sqrt{\gamma^2 \lambda^2 - 1}}{Q(\lambda)} \left[ \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2-1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2-1} \right) \right] d\lambda \right\} e^{-\frac{k}{n}} J_1(k\rho) dk. \quad (26,4)$$

[Заметим, в соответствии со сказанным ранее, что при  $n \rightarrow \infty$  формулы (23,4) не следует применять в области III].

Учитывая отмеченные ранее неравенства (20,3), (29,3), (33,3), (35,3) и пользуясь рис. 4, замечаем, что после перестановки порядка интегрирования по  $k$  и  $\lambda$ , интегрирования по  $k$  и предельного перехода  $n \rightarrow \infty$  в области III отличным от нуля будет лишь интеграл (21,4) (векторный потенциал для этой области мы не принимаем во внимание). В области же I отличными от нуля будут интегралы (21,4) и (24,4). Наконец, в области II отличными от нуля оказываются интегралы (21,4), (24,4) и (25,4).

Выражая смещения через потенциалы по формулам (3,1), получим для области III:

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda\varphi} = q_{\lambda III} &= \frac{4}{b\mu\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{P(\lambda)} \times \right. \\
 &\times \left. e^{-k \left( z \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2} + \frac{1}{n} \right)} \sin k \frac{t}{b} \lambda d\lambda \right\} k J_1(k\rho) dk; \\
 & \hspace{15em} (27,4) \\
 w_{\lambda\varphi} = w_{\lambda III} &= \frac{4}{b\mu\pi^2} \int_0^\infty \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2) (1-\gamma^2\lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1}}{P(\lambda)} \times \right. \\
 &\times \left. e^{-k \left( z \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2} + \frac{1}{n} \right)} \sin k \frac{t}{b} \lambda d\lambda \right\} k J_0(k\rho) dk.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что при  $z < \frac{t}{b}$  и  $n < \infty$  к этим формулам нужно добавить смещения  $q_{\lambda\psi}$  и  $w_{\lambda\psi}$ , вычисленные по векторному потенциалу. Но, как и прежде, мы будем интересоваться лишь сосредоточенным воздействием. Поэтому нам сейчас нет необходимости приводить значения для  $q_{\lambda\psi}$  и  $w_{\lambda\psi}$ .

В области I к формулам (27,4) добавятся еще слагаемые от потенциала (24,4). Поэтому для  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$  в этой области мы получим значения

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda 1} = q_{\lambda \varphi} - \frac{1}{b \mu \pi^2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{P(\lambda)} \times \right. \\
 \times \left[ \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) + \right. \\
 \left. \left. + \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right] d\lambda \right\} e^{-\frac{k}{n}} k J_1(k \rho) dk, \\
 \omega_{\lambda 1} = \omega_{\lambda \varphi} - \frac{1}{b \mu \pi^2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2) \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{P(\lambda)} \times \right. \\
 \times \left[ \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) - \right. \\
 \left. \left. - \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right] d\lambda \right\} e^{-\frac{k}{n}} k J_0(k \rho) dk.
 \end{aligned} \tag{28,4}$$

Наконец, в области II смещения  $q_{\lambda}$  и  $\omega_{\lambda}$  будут определяться посредством следующих выражений:

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda II} = q_{\lambda I} + \\
 + \frac{1}{b \mu \pi^2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(\lambda^2 - 1) (1 - \gamma^2 \lambda^2)}{P(\lambda)} \left[ \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) - \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda - \right. \right. \\
 \left. \left. - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right] d\lambda \right\} e^{-\frac{k}{n}} k J_1(k \rho) dk, \\
 \omega_{\lambda II} = \omega_{\lambda I} - \\
 - \frac{1}{b \mu \pi^2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(1 - \gamma^2 \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1}}{P(\lambda)} \left[ \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda + \right. \right. \right. \\
 \left. \left. + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) + \sin k \left( \frac{t}{b} \lambda - \right. \right. \\
 \left. \left. - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right] d\lambda \right\} e^{-\frac{k}{n}} k J_0(k \rho) dk.
 \end{aligned} \tag{29,4}$$

Произведем теперь в формулах (27,4), (28,4) и (29,4) интегрирование по переменной  $k$ .

В результате этого получим для области III формулы:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
 q_{\text{III}} &= q_{\lambda\varphi} = \\
 &= \frac{4}{b\mu\pi^2} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{P(\lambda)} \times \\
 &\times \operatorname{Im} \left\{ \frac{\rho}{\left[ \left( z \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2} + \frac{1}{n} - i \frac{t}{b} \lambda \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} d\lambda, \\
 w_{\text{III}} &= w_{\lambda\varphi} = \frac{4}{b\mu\pi^2} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)(1-\gamma^2\lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1}}{P(\lambda)} \times \\
 &\times \operatorname{Im} \left\{ \frac{z \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2} + \frac{1}{n} - i \frac{t}{b} \lambda}{\left[ \left( z \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2} + \frac{1}{n} - i \frac{t}{b} \lambda \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} d\lambda;
 \end{aligned} \tag{30,4}$$

для области I находим:

$$\begin{aligned}
 q_{\text{I}} &= q_{\lambda\varphi} = \frac{1}{b\mu\pi^2} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2) \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{P(\lambda)} \times \\
 &\times \operatorname{Im} \left\{ \frac{\rho}{\left[ \left( i \left( z \sqrt{\lambda^2-1} - \frac{t}{b} \lambda \right) + \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \right. \\
 &\left. + \frac{\rho}{\left[ \left( -i \left( z \sqrt{\lambda^2-1} + \frac{t}{b} \lambda \right) + \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} d\lambda,
 \end{aligned} \tag{31,4}$$

<sup>1</sup> Подобные формулам (13,4). Заметим, что ветви многозначных функций в знаменателях формул (30,4), (31,4) и (32,4) фиксируются подобно тому, как это имело место для формул (13,4).

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda I} = & w_{\lambda \varphi} - \frac{1}{b\mu\pi^2} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2 - \lambda^2)^2 \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{P(\lambda)} \times \\
 & \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{\frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)}{\left[ \left( \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
 & \left. - \frac{\frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)}{\left[ \left( \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} d\lambda;
 \end{aligned} \tag{31,4}$$

и для области II будем иметь:

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda II} = & q_{\lambda I} + \frac{1}{b\mu\pi^2} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(\lambda^2 - 1)(1 - \gamma^2 \lambda^2)}{P(\lambda)} \times \\
 & \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho}{\left[ \left( \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
 & \left. - \frac{\rho}{\left[ \left( \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} d\lambda, \\
 w_{\lambda II} = & w_{\lambda I} - \frac{1}{b\mu\pi^2} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(1 - \gamma^2 \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1}}{P(\lambda)} \times \\
 & \times \operatorname{Im} \left\{ \frac{\frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)}{\left[ \left( \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda + z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right)}{\left[ \left( \frac{1}{n} - i \left( \frac{t}{b} \lambda - z \sqrt{\lambda^2 - 1} \right) \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right\} d\lambda.
 \end{aligned} \tag{32,4}$$

4. Дальнейшая наша задача должна была бы заключаться в исследовании последних формул и в получении из них физических следствий. Но из вида интегралов в формулах (30,4) — (32,4) ясно, что упомянутые исследования могут быть выполнены почти в точности так же, как производились исследования интегралов (21,3), (22,3), а также (30,3), (38,3) и (39,3) в § 3. Поэтому не будем останавливаться на исследовании формул (30,4) — (32,4), а лишь кратко сформулируем два очевидных результата, относящихся к точкам зрения неподвижного и движущегося наблюдателей.

Не представляло бы труда убедиться в том, что исследование составляющих  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$  формул (3,4) в любой фиксированной точке  $(\rho, z)$  полупространства показывает, что  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$  убывают при возрастании времени, как  $t^{-3}$ , т. е. быстрее, чем в случае включенной силы из § 3.

Что же касается точки зрения движущегося с радиальной скоростью вдоль поверхности полупространства наблюдателя, то для ее установления следует ввести вместо  $\rho$  новую переменную  $m$  по формуле (45,3).

При этом оказывается, что если  $\lambda^* < 1$  (т. е. если радиальная скорость  $v$  наблюдателя меньше скорости распространения поперечных волн), то выполняются следующие порядковые соотношения

$$q_\lambda = 0 \left( \frac{1}{t^2} \right); \quad w_\lambda = 0 \left( \frac{1}{t^3} \right). \quad (33,4)$$

Если же  $1 < \lambda^* < \frac{1}{\gamma}$  (т. е. если радиальная скорость  $v$  наблюдателя заключена в промежутке  $\frac{1}{b} < v < \frac{1}{a}$ ), то имеет место

$$|q_\lambda| \leq 0 \left( \frac{1}{t^2} \right); \quad |w_\lambda| \leq 0 \left( \frac{1}{t^2} \right). \quad (34,4)$$

Сравнение перечисленных результатов с подобными же результатами § 3, позволяет прийти к выводу, что в области I составляющие  $q_\lambda$  и  $w_\lambda$  в случае импульсного граничного воздействия убывают во времени быстрее на целый порядок (т. е. убывают не медленнее  $t^{-2}$  в то время, как в задаче из § 3 закон убывания определялся выражением  $t^{-1}$ ). То же самое можно сказать и об области II.

Наконец, отметим, что закон убывания во времени релеевских составляющих смещений (13,3) и (19,4) в обоих задачах оказывается совершенно тождественным.

§ 5. Об исследовании решений при внутренних источниках возмущений

В случае внутреннего источника типа (1,2), (10,1) результирующее поле смещений в полупространстве представляется формулами

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{рез.}} &= q(\rho, z, t) + q^0(\rho, z, t), \\ w_{\text{рез.}} &= w(\rho, z, t) + w^0(\rho, z, t), \end{aligned} \right\} (1,5)$$

в которых  $q$  и  $w$  имеют значения из (29,2) а  $q^0$  и  $w^0$  имеют значения из (31,2) при условии, что  $f(\zeta, k)$  определяется по (17,2). Исследование функций  $q_{\text{рез.}}$  и  $w_{\text{рез.}}$  естественно производить путем отдельного изучения слагаемых в правых частях (1,5), что мы и сделаем, начиная с  $q^0$  и  $w^0$ .

1. Подинтегральные функции в первых интегралах формул (31,2) имеют разветвления при  $\zeta = \pm \frac{i}{\gamma}$ , подинтегральные же функции вторых интегралов имеют разветвления в точках  $\zeta = \pm i$ . Чтобы сделать подинтегральные функции однозначными, проведем разрезы от точек разветвления вдоль мнимой оси на бесконечности (не пересекая вещественную ось). Тогда каждый из интегралов Меллина, входящих в правые части (31,2), можно будет представить суммой вычета в точке  $\zeta = 0$  и интеграла по контурам, обходящим разрезы.

Вычисляя вычеты всех интегралов из (31,2) в полюсах третьего порядка при  $\zeta = 0$ , подставляя значения этих вычетов (вместо интегралов Меллина) в (31,2), выполняя затем интегрирование по  $k$  и переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , мы получаем для статических составляющих смещений следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{ст.}}^0 &= -\frac{1}{8\pi\mu} (\gamma^2 - 1) \frac{\rho(z-h)^{\frac{3}{2}}}{[\rho^2 + (z-h)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ w_{\text{ст.}}^0 &= \frac{1}{8\pi\mu} (\gamma^2 + 1) \frac{1}{[\rho^2 + (z-h)^2]^{\frac{1}{2}}} - \\ &\quad - \frac{1}{8\pi\mu} (\gamma^2 - 1) \frac{(z-h)^2}{[\rho^2 + (z-h)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right\} (2,5)$$

Заметим, что формулы (2,5) в точности совпадают со статическими решениями первого типа для безграничной среды, известными из литературы.

Что же касается интегралов, распространенных по контурам, обходящим разрезы, то для их изучения следует перейти от переменной  $\zeta$  к вещественной переменной  $\lambda$ , затем следует выполнить интегрирование по переменной  $k$  и, наконец, перейти к пределу  $n \rightarrow \infty$ . Выполнение всех перечисленных операций позволяет убедиться в том, что рассматриваемые интегралы оказываются равными нулю, соответственно, позади фронтов продольной и поперечной волн. Таким образом оказывается, что позади поперечной волны поле смещений  $q_{\text{ст.}}^0, \omega_{\text{ст.}}^0$  из (2,5) совпадает с полным полем смещений  $q^0, \omega^0$  точечного источника.

В области же между фронтами продольной и поперечной волн вторые интегралы (пути интегрирования в которых обходят разрезы, идущие от точек  $\pm i$ ) отличны от нуля. Поэтому в рассматриваемой области имеет место режим, зависящий от времени [7]. Мы не будем более подробно останавливаться на рассмотрении вторых слагаемых из (1,5), а перейдем к изучению поля отраженных волн, определяющихся по (29,2).

2. Проводя разрезы, как и всегда, вдоль мнимой оси вне промежутка  $(-i, i)$ , будем деформировать контуры интегрирования  $\text{Re } \zeta = \sigma > 0$  в контуры, обходящие разрезы. При этом пересекаются особые точки  $\zeta = 0$  и  $\zeta = \pm i\vartheta$ . Поэтому интегралы Меллина из (29,2) представляются суммами вычетов подинтегральных функций в упомянутых точках и интегралов по разрезам.

Если вычислить вычеты подинтегральных функций каждого интеграла Меллина из (29,2), подставить значения этих вычетов в (29,2) вместо упомянутых интегралов, произвести интегрирование по переменной  $k$  и перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , то получается следующая статическая часть смещений (29,2):

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{ст.}} &= \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \frac{-\gamma^2}{1-\gamma^2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{h+z}{\rho \sqrt{(h+z)^2 + \rho^2}} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{(1+\gamma^2)(z-h)\rho}{2[(h+z)^2 + \rho^2]^2} + \frac{3(1-\gamma^2)hz(h+z)\rho}{[(h+z)^2 + \rho^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}, \\ \omega_{\text{ст.}} &= \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \frac{1+\gamma^4}{2(1-\gamma^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (h+z)^2}} + \right. \\ &+ \left. \frac{(h^2+z^2)(1+\gamma^2) + 4\gamma^2 hz}{2[\rho^2 + (h+z)^2]^2} + \frac{3(1-\gamma^2)(h+z)^2 hz}{[\rho^2 + (h+z)^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}. \end{aligned} \right\} (3,5)$$

Не представляет труда убедиться в том, что сумма правых частей формул (2,5) и (3,5) дает статическое решение задачи теории упругости для полупространства, соответствующее единичной, включенной в точке  $\rho=0$ ,  $z=h$  силе, параллельной оси  $Oz$ .

Определим теперь часть смещений, даваемую вычетами в простых корнях  $\zeta = \pm i\vartheta$  уравнения Релея. Для этой цели введем обозначения

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \sqrt{1 - \gamma^2 \vartheta^2}; \quad \tilde{\beta} = \sqrt{1 - \vartheta^2}; \quad \tilde{\delta} = 2 - \vartheta^2; \quad \tilde{R} = \tilde{\delta}^2 + 4\tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \\ R_{\gamma\gamma} &= \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right)^2 + 2(h+z)^2 \bar{\alpha}^2 \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} + \rho^2 \right) + \\ &\quad + (h+z)^4 \bar{\alpha}^4; \\ R_{\gamma 1} &= \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right)^2 + 2(h\tilde{\beta} + z\tilde{\alpha})^2 \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} + \rho^2 \right) + \\ &\quad + (h\tilde{\beta} + z\tilde{\alpha})^4; \\ R_{1\gamma} &= \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right)^2 + 2(h\tilde{\alpha} + z\tilde{\beta})^2 \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} + \rho^2 \right) + \\ &\quad + (h\tilde{\alpha} + z\tilde{\beta})^4; \\ R_{11} &= \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right)^2 + 2(h+z)^2 \tilde{\beta}^2 \left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} + \rho^2 \right) + \\ &\quad + (h+z)^4 \tilde{\beta}^4, \end{aligned} \tag{4,5}$$

$$\theta_{\gamma\gamma} = \operatorname{arctg} \frac{2\vartheta \frac{t}{b} (h+z) \bar{\alpha}}{\left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right) - (h+z)^2 \bar{\alpha}^2},$$

$$\theta_{\gamma 1} = \operatorname{arctg} \frac{2\vartheta \frac{t}{b} (h\tilde{\beta} + z\tilde{\alpha})}{\left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right) - (h\tilde{\beta} + z\tilde{\alpha})^2},$$

$$\theta_{1\gamma} = \operatorname{arctg} \frac{2\vartheta \frac{t}{b} (h\tilde{\alpha} + z\tilde{\beta})}{\left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right) - (h\tilde{\alpha} + z\tilde{\beta})^2},$$

$$\theta_{11} = \operatorname{arctg} \frac{2\vartheta \frac{t}{b} (h+z) \tilde{\beta}}{\left( \vartheta^2 \frac{t^2}{b^2} - \rho^2 \right) - (h+z)^2 \tilde{\beta}^2},$$

причем [как и в (10,3)] будем считать, что  $-\pi \leq \vartheta_{ij} \leq 0$ , ( $i = \gamma, 1; j = \gamma, 1$ ). Тогда искома часть смещений выразится в виде следующих формул:

$$\begin{aligned}
 q_R = & \frac{1}{8\pi\mu\vartheta^4 c_0} \left\{ \frac{2\tilde{R} - 4\tilde{\delta} - 4\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\rho} + \frac{\tilde{R}}{\rho\sqrt[4]{R_{\gamma\gamma}}} \times \right. \\
 & \times \left[ \vartheta \frac{t}{b} \sin \frac{\theta_{\gamma\gamma}}{2} - (h+z)\tilde{\alpha} \cos \frac{\theta_{\gamma\gamma}}{2} \right] - \frac{4\tilde{\delta}}{\rho\sqrt[4]{R_{\gamma 1}}} \times \\
 & \times \left[ \vartheta \frac{t}{b} \sin \frac{\theta_{\gamma 1}}{2} - (h\tilde{\beta} + z\tilde{\alpha}) \cos \frac{\theta_{\gamma 1}}{2} \right] - \frac{4\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\rho\sqrt[4]{R_{1\gamma}}} \times \\
 & \times \left[ \vartheta \frac{t}{b} \sin \frac{\theta_{1\gamma}}{2} - (h\tilde{\alpha} + z\tilde{\beta}) \cos \frac{\theta_{1\gamma}}{2} \right] + \\
 & \left. + \frac{\tilde{R}}{\rho\sqrt[4]{R_{11}}} \left[ \vartheta \frac{t}{b} \sin \frac{\theta_{11}}{2} - (h+z)\tilde{\beta} \cos \frac{\theta_{11}}{2} \right] \right\}, \\
 w_R = & \frac{1}{8\pi\mu\vartheta^4 c_0} \left\{ \frac{\tilde{R}\tilde{\alpha}}{\sqrt[4]{R_{\gamma\gamma}}} \cos \frac{\theta_{\gamma\gamma}}{2} - \frac{4\tilde{\alpha}\tilde{\delta}}{\sqrt[4]{R_{\gamma 1}}} \cos \frac{\theta_{\gamma 1}}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{4\tilde{\alpha}\tilde{\delta}}{\sqrt[4]{R_{1\gamma}}} \cos \frac{\theta_{1\gamma}}{2} + \frac{\tilde{R}}{\tilde{\beta}\sqrt[4]{R_{11}}} \cos \frac{\theta_{11}}{2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5,5}$$

Исследование формул (5,5) при больших значениях времени производится подобно тому, как мы исследовали формулы (8,3) в § 3. При этом оказывается, что с точки зрения неподвижного наблюдателя выражения  $q_R$  и  $w_R$  убывают как  $t^{-2}$ . Наблюдатель же, движущийся с радиальной скоростью  $v \neq v_R$ , регистрирует более медленный закон убывания, а именно, подобный  $t^{-1}$ . Наконец, наблюдатель, движущийся со скоростью волн Релея ( $v = v_R$ ), находит, что выражения (5,5) убывают, как  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ .

Существенно подчеркнуть, что наблюдатели, исследующие поля (8,3) и (5,5), регистрируют все же не вполне одинаковые картины. Различие заключается, во-первых, в том, что возмущение (5,5) не обращается в бесконечность

на поверхности  $z=0$  [в то время, как смещения (8,3) имели бесконечный разрыв на плоскости  $z=0$ ], во-вторых, в том, что возмущения (5,5) имеют на больших расстояниях от точки приложения воздействия два резко выраженных максимума (соответствующих результатам отражения от границы  $z=0$  продольной и поперечной волн), расстояния между которыми все время остаются неизменными. Релеевская же волна (8,3) характеризовалась лишь одной точкой максимума возмущения. Заметим, наконец, что в предельном переходе  $h \rightarrow 0$  (внутренний источник приближается к граничной поверхности) смещения (5,5) переходят в смещения (8,3).

3. Нам следовало бы теперь исследовать часть смещений  $q_\lambda$  и  $\omega_\lambda$ , представляющуюся посредством интегралов, пути интегрирования в которых обходят разрезы. Но не представляет труда убедиться в том, что исследование этих интегралов может быть произведено совершенно тождественно исследованию подобных же интегралов из § 3, причем получающиеся результаты в точности совпадают с результатами упомянутого параграфа. Поэтому мы не будем останавливаться ни на указанных исследованиях, ни на обсуждении полученных результатов.

4. Способами, эквивалентными рассмотренным, можно было бы произвести полное исследование решения задачи о внутреннем источнике возмущений типа центра сжатия из § 2. Для этой цели следовало бы исходить из формул (23,2), а также (27,2) и (32,2) для потенциалов и лишь в конце исследований следовало бы перейти к составляющим поля упругих смещений по формулам (3,1). Нам представляется, что на этом вопросе сейчас нет необходимости дольше задерживаться. Заметим лишь, что к задачам о внутренних источниках возмущений мы возвратимся еще в главе III в связи с проблемами сейсмозведки.

### § 6. О количественных исследованиях поля упругих смещений

Целью настоящего параграфа будем считать дальнейшее исследование окончательных формул задачи о полупространстве при включенной единичной силе (§ 3) и установление способов, позволяющих вычислять компоненты вектора упругих смещений этой задачи сколь угодно точно. При этом всегда будем переходить по формулам (17,3) к относительным переменным  $\xi$  и  $\eta$ , которые сводят нашу задачу

к задаче определения смещений в полукруге  $\xi^2 + \eta^2 \leq \frac{1}{\gamma^2}$ ,  $\eta \geq 0$ , изображенном на рис. 4. Заметим, что выбор, в качестве объекта исследования, задачи о граничной включенной единичной силе не имеет принципиального значения и все наши дальнейшие результаты без труда могут быть распространены на ряд других краевых задач для упругого полупространства.

1. Наше исследование начнем с общего замечания, касающегося вопроса о том, какие формулы следует брать за исходные для того, чтобы методами численного интегрирования притти (с наименьшей затратой труда) к определению поля смещений.

Нам представляется, что в области I (рис. 4) наиболее удобными для этой цели являются формулы (2,3), слагаемые в которых определяются по (3,3), (8,3), (18,3) и (22,3), (30,3). При этом, конечно, во всех этих формулах полагается  $n = \infty$ .

Правые части формул (3,3) и (8,3) не содержат операций интегрирования и сравнительно просто зависят от переменных  $\rho$ ,  $z$  и  $t$ . Поэтому главную трудность в исследованиях представляют формулы (22,3) и (30,3), но, как увидим, эти трудности не являются чрезмерными.

При исследовании возмущений в области II (рис. 4) можно было исходить из формул (2,3), (3,3), (8,3), (18,3), (22,3) и (38,3) [или 39,3]. Так мы и будем поступать в п. 3 настоящего параграфа при исследовании возмущений на границе  $z = 0$  полупространства. Но в случае  $z > 0$  формулы (38,3) и (39,3) оказываются весьма сложными, вследствие большого числа имеющихся в них несобственных интегралов. Поэтому для исследования возмущений в области II удобнее пользоваться другими формулами.

Мы будем разбивать компоненты поля смещений в области II на слагаемые

$$q = q_\varphi + q_\psi; \quad w = w_\varphi + w_\psi, \quad (1,6)$$

соответствующие продольному  $\varphi$  и векторному  $\psi$  потенциалам и будем представлять первые слагаемые суммами

$$q_\varphi = q_{0\varphi} + q_{R\varphi} + q_{\lambda\varphi}; \quad w_\varphi = w_{0\varphi} + w_{R\varphi} + w_{\lambda\varphi} \quad (2,6)$$

типа (2,3), в которых выражения, стоящие в правых частях, определяются по (26,3), (27,3) и (22,3).

Что же касается вторых слагаемых в (1,6), то для их определения будем пользоваться формулами

$$q_{\psi} = \frac{-1}{4\pi^2\mu i\rho} \int_{(L_2)} \frac{2\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \left[ \frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2} \right]}{\zeta R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}}} d\zeta; \quad (3,6)$$

$$w_{\psi} = \frac{-1}{4\pi^2\mu i} \int_{L_2} \frac{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}{\zeta R(\zeta) \left[ \left( \frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2} - \frac{1}{n} \right)^2 + \rho^2 \right]^{\frac{1}{2}}} d\zeta,$$

(в которых нужно будет еще перейти к пределу  $n \rightarrow \infty$ ), вытекающими из (18,1).

Впереди фронта сферической поперечной волны правые части предыдущих формул могут быть преобразованы в области II в несобственные вещественные интегралы

$$\left. \begin{aligned} q_{\psi} &= \frac{2}{\pi^2\mu} \frac{t}{b} \xi \int_{\lambda'}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{\lambda^2-1} \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2} (\lambda - \eta \sqrt{\lambda^2-1})}{\lambda P(\lambda) \sqrt{(\lambda - \eta \sqrt{\lambda^2-1})^2 - \xi^2}} d\lambda, \\ W_{\psi} &= \frac{-2}{\pi^2\mu} \frac{t}{b} \int_{\lambda'}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(2-\lambda^2)^2 \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{\lambda P(\lambda) \sqrt{(\lambda - \eta \sqrt{\lambda^2-1})^2 - \xi^2}} d\lambda, \end{aligned} \right\} (4,6)$$

в которых  $\lambda'$  определяется по (32,3), а  $P(\lambda)$  имеет значение (15,3). В области же III они равны нулю.

Чтобы доказать высказанные утверждения, будем считать, что разрезы, проведенные для униформизации радикалов  $\sqrt{1+\zeta^2}$  и  $\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}$ , идут из точек разветвления на бесконечности, параллельно отрицательной части вещественной оси, а разрезы, проведенные для униформизации радикала  $\sqrt{\left(\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2} - \frac{1}{n}\right)^2 + \rho^2}$ , идут (не пересекая вещественную ось) от его точек разветвления  $\zeta = \zeta_1$

на бесконечность, параллельно мнимой оси. При этом заметим, что расположенные в правой полуплоскости ( $\zeta$ ) точки разветвления  $\zeta_1$ , определяющиеся второй формулой (23,1), оказываются при  $n \rightarrow \infty$  чисто мнимыми и сопряженными друг по отношению к другу. Наконец, заметим, что ветвь радикала  $\sqrt{\left(\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2} - \frac{1}{n}\right)^2 + \rho^2}$  должна определяться условием, что при  $n = \infty$ ,  $\zeta = i\tau$  и  $\lambda'' < |\tau| < \lambda'$  [где  $\lambda'$  и  $\lambda''$  имеют значения (32,3), (34,3)] оказывается справедливым равенство

$$\arg \sqrt{\left(\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2}\right)^2 + \rho^2} = 0.$$

Считая сначала  $n < \infty$ , произведем деформацию контура ( $L_2$ ) [определенного в (18,1)] интегралов (3,6) в контуры ( $L^+$ ) и ( $L^-$ ), охватывающие разрезы, идущие от точек  $\zeta = \zeta_1$ , расположенных в правой полуплоскости. После же указанной деформации пути интегрирования ( $L_2$ ), рассмотрим предельный переход  $n \rightarrow \infty$ , перейдем к вещественной переменной интегрирования  $\lambda$  и введем в рассмотрение переменные  $\xi$  и  $\eta$  из (17,3).

В результате такого рода операций без труда выясняется, что в области III значения интегралов обращаются в нуль, а в области II значения этих интегралов представляются формулами (4,6).

Наконец, при исследовании возмущений в области III, в которой векторный потенциал  $\psi$  равен нулю, удобнее всего пользоваться формулами (2,6), (26,3), (27,3) и (22,3).

В заключение заметим, что высказанные соображения не следует понимать в абсолютном смысле, так как иногда встречаются области значений независимых переменных  $\rho$ ,  $z$ ,  $t$ , количественные исследования поля смещений в которых требуют применения других форм представления окончательного решения задачи. С таким исключительным случаем мы встретимся уже в следующем пункте настоящего параграфа.

2. Исследование поля смещений на оси  $\rho = 0$ . Не представляло бы труда убедиться в том, что для исследования поля смещений при  $\rho = 0$  удобно воспользоваться формулами (28,1) при  $n = \infty$ . Действительно, если положить

в этих формулах  $\rho = 0$  и  $n = \infty$ , то для компонент поля упругих смещений получим следующие выражения:

$$q(0, z, t) = 0;$$

$$w(0, z, t) = \left\{ \frac{b}{2\pi\mu t} \left[ \frac{(2 + \zeta_a^2)\sqrt{1 + \gamma^2\zeta_a^2}}{\zeta_a R(\zeta_a) \left(1 - \frac{\gamma^2 \eta \zeta_a}{\sqrt{1 + \gamma^2\zeta_a^2}}\right)} - \frac{2\sqrt{1 + \gamma^2\zeta_b^2}}{\zeta_b R(\zeta_b) \left(1 - \frac{\eta \zeta_b}{\sqrt{1 + \zeta_b^2}}\right)} \right] \right\}, \quad (5,6)$$

в которых  $\zeta_a$  и  $\zeta_b$  представляются простыми формулами

$$\zeta_a = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \gamma^2\eta^2}}; \quad \zeta_b = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (5,6)$$

Заметим кстати, что при рассмотрении возмущенной области  $\left[0 \leq \eta \leq \frac{1}{\gamma}\right]$  величина  $\zeta_a$  вещественна. Величина же  $\zeta_b$  вещественна лишь позади фронта поперечной волны (т. е. при  $\eta \leq 1$ ). Поэтому в промежутке  $1 < \eta < \frac{1}{\gamma}$  между фронтами волн величина  $\zeta_b$  — чисто мнимая, и второе слагаемое в (5.6) не следует учитывать, так как равны нулю вторые слагаемые в формулах (25.1), (28.1).

Существенно подчеркнуть, что вычисление вертикальной составляющей смещения по формуле (5.6) требует выполнения лишь элементарных алгебраических операций и не является сколько-нибудь затруднительным.

3. Исследование поля смещений на границе  $z = 0$  полупространства. При таком исследовании будем исходить из формул

$$q = q_0 + q_R + q_\lambda; \quad w = w_0 + w_R + w_\lambda, \quad (2,3)$$

в которых первые два слагаемых уже имеют простой вид, определяемый равенствами (3,3) и (8,3), (9,3), (10,3).

Пользуясь обозначениями (17,3) и полагая в формулах (3,3)  $n = \infty$  и  $z = 0$ , получим при любых  $\xi$

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{-\gamma^2}{4\pi\mu(1-\gamma^2)\frac{t}{b}\xi}, \\ \omega_0 &= \frac{1}{4\pi\mu(1-\gamma^2)\frac{t}{b}\xi}. \end{aligned} \right\} (6,6)$$

Для получения значений слагаемых  $q_R$  и  $\omega_R$  из (8,3) при  $n = \infty$  и  $z = 0$  следует учесть обозначения (9,3) и условия (10,3). Упомянутые значения оказываются следующими:

если  $\xi < \vartheta$ , то

$$\left. \begin{aligned} q_R|_{z=0} &= \frac{2-\vartheta^2}{8\pi\mu c_0 \frac{t}{b}\xi} \left[ 1 - \frac{\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 - \xi^2}} \right], \\ \omega_R|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \right\} (7,6)$$

и если  $\xi > \vartheta$ , то

$$\left. \begin{aligned} q_R|_{z=0} &= \frac{2-\vartheta^2}{8\pi\mu c_0 \frac{t}{b}\xi}, \\ \omega_R|_{z=0} &= -\frac{\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}}{4\pi\mu c_0 \frac{t}{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \vartheta^2}}. \end{aligned} \right\} (7_2,6)$$

Наконец, полагая  $z = 0$  в формулах (22,3), (30,3), (38,3) и учитывая, что значения  $R_\gamma(\lambda)$  и  $\theta_\gamma(\lambda)$  в (22,3) определяются посредством (9,3) и (10,3) при  $n = \infty$  и  $\vartheta = \lambda$ , получаем из (18,3):

при  $\xi \leq 1$ :

$$\left. \begin{aligned} q_\lambda|_{z=0} &= \frac{2}{\pi^2\mu \frac{t}{b}\xi} \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\lambda(2-\lambda^2)\sqrt{\lambda^2-1}\sqrt{1-\gamma^2\lambda^2}}{P(\lambda)} \times \\ &\quad \times \left( 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} \right) d\lambda; \\ \omega_\lambda|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} (8,6)$$

и при  $1 \leq \xi \leq \frac{1}{\gamma}$ :

$$q_\lambda|_{z=0} = \frac{2}{\pi^2 \mu \frac{t}{b} \xi} \left\{ \int_1^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\lambda (2 - \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{P(\lambda)} d\lambda - \int_\xi^{\frac{1}{\gamma}} \frac{\lambda^2 (2 - \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1} \sqrt{1 - \gamma^2 \lambda^2}}{P(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - \xi^2}} d\lambda \right\}; \quad (8_2, 6)$$

$$\omega_\lambda|_{z=0} = -\frac{4}{\pi^2 \mu \frac{t}{b}} \int_1^\xi \frac{\lambda (1 - \gamma^2 \lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - 1}}{P(\lambda) \sqrt{\xi^2 - \lambda^2}} d\lambda,$$

где  $P(\lambda)$  имеет значение (15,3).

Из полученных выражений видно, что лишь третьи слагаемые  $q_\lambda$  и  $\omega_\lambda$  в (2,3) представляются интегралами и создают некоторые затруднения при вычислениях. К рассмотрению их и перейдем.

Из формул (8<sub>1</sub>,6) и (8<sub>2</sub>,6) видно, что  $q_\lambda$  представляется посредством интегралов, не выражающихся через элементарные функции. Поэтому значение  $q_\lambda$  может быть определено лишь приближенно методами численного интегрирования. При  $\xi < 1$  можно использовать известные формулы прямоугольников, трапеций или парабол. При  $\xi > 1$  вычисление несобственного интеграла можно произвести путем „выделения особенности“ или приведением его к эллиптическим интегралам.

Значения же  $\omega_\lambda$  легко определяются через первообразную. Действительно, производя замену переменной  $\lambda^2 = \tau$  и освобождаясь от радикала в числителе подинтегрального выражения из (8<sub>2</sub>,6), можно представить интеграл формулой

$$\omega_\lambda|_{z=0} = -\frac{2}{\pi^2 \mu \frac{t}{b}} \int_1^{\xi^2} \frac{(1 - \gamma^2 \tau) (\tau - 1) d\tau}{[(2 - \tau)^4 + 16(1 - \gamma^2 \tau) (\tau - 1)] \sqrt{-\xi^2 + (\xi^2 + 1)\tau - \tau^2}}, \quad (9,6)$$

в которой  $\xi > 1$ .

Этот интеграл легко вычисляется разложением подинтегрального выражения на сумму простейших дробей. [Заметим, что один из корней знаменателя этой дроби равен нулю. Другой оказывается равным модулю квадрата простого корня уравнения Релея (1,3). Два других корня будут либо вещественными, либо комплексными, в зависимости от соотношения упругих постоянных  $\lambda$  и  $\mu$ . При  $\lambda = \mu$  (и других соотношениях, достаточно близких к этому) все корни будут вещественными. При  $\lambda = 2\mu$  уже будем иметь два комплексных корня. Ни один из корней не располагается на промежутке  $(1, \frac{1}{\gamma})$ .]

Предположим, в качестве примера, что  $\lambda = \mu$ . Тогда получим для  $\gamma$  значение  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , и интеграл (9,6) представится в виде суммы

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda}|_{z=0} = & \frac{-1}{\pi^2 \mu \frac{t}{b}} \left[ \frac{3}{16} \int_1^{\xi^2} \frac{d\tau}{\tau \sqrt{(\tau - \xi^2 + (\xi^2 + 1)\tau - \tau^2)}} - \right. \\ & - \frac{3}{16} \int_1^{\xi^2} \frac{d\tau}{(\tau - 4) \sqrt{-(\xi^2 + (\xi^2 + 1)\tau - \tau^2)}} + \\ & + \frac{1}{16\sqrt{3}} \int_1^{\xi^2} \frac{d\tau}{\left(\tau - 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \sqrt{-(\xi^2 + (\xi^2 + 1)\tau - \tau^2)}} \\ & \left. - \frac{1}{16\sqrt{3}} \int_1^{\xi^2} \frac{d\tau}{\left(\tau - 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \sqrt{-(\xi^2 + (\xi^2 + 1)\tau - \tau^2)}} \right]. \quad (9_{1,6}) \end{aligned}$$

Выполняя в (9<sub>1,6</sub>) интегрирование по  $\tau$ , получим следующее простое выражение

$$\begin{aligned} \omega_{\lambda}|_{z=0} = & -\frac{1}{\pi^2 \mu \frac{t}{b}} \left\{ \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{\xi} + \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{12 - 3\xi^2}} - \right. \\ & - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{6\sqrt{3} + 10 - (2\sqrt{3} + 3)\xi^2}} - \\ & \left. - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\sqrt{3} - 3)\xi^2 - (6\sqrt{3} - 10)}} \right\}. \quad (9_{2,6}) \end{aligned}$$

Подставим теперь в формулы, определяющие слагаемые  $w_0$  и  $w_R$ , значения  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $\vartheta = \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ , соответствующие равенству  $\lambda = \mu$ . Тогда из (2,3) получим следующие окончательные формулы для вертикальной составляющей вектора упругих смещений:

при  $\xi < \vartheta$ :

$$w|_{z=0} = \frac{1}{\pi\mu} \frac{t}{b} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\xi}, \quad (10,6)$$

при  $\vartheta \leq \xi \leq 1$ :

$$w|_{z=0} = \frac{1}{\pi\mu} \frac{t}{b} \left\{ \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\xi} - \frac{1}{8\sqrt{2\sqrt{3}-3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \vartheta^2}} \right\} \quad (11,6)$$

и при  $1 \leq \xi \leq \frac{1}{\gamma}$ :

$$w|_{z=0} = \frac{1}{\pi\mu} \frac{t}{b} \left\{ \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\xi} - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{12-3\xi^2}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{\sqrt{10+6\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})\xi^2}} - \frac{1}{16\sqrt{2\sqrt{3}-3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - \vartheta^2}} \right\}, \quad (11,6)$$

позволяющие вычислять вертикальную составляющую сколь угодно точно.

Заметим, что полученные формулы для смещений на границе  $z=0$  в виде сумм (2,3), легко позволяют (особенно для вертикальной составляющей) строить графики  $q_{z=0}$  и  $w_{z=0}$ , имеющие вид, указанный на рис. 9 и 10.

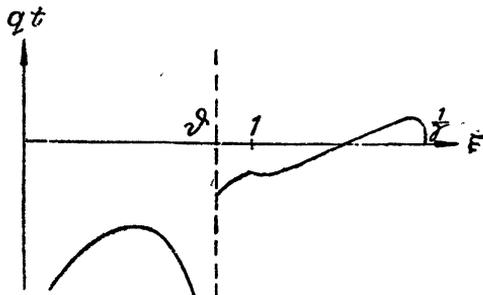


Рис. 9

Из этих рисунков, в частности, нетрудно получить графики, подобные известным графикам Лемба<sup>[1]</sup> для случая со-

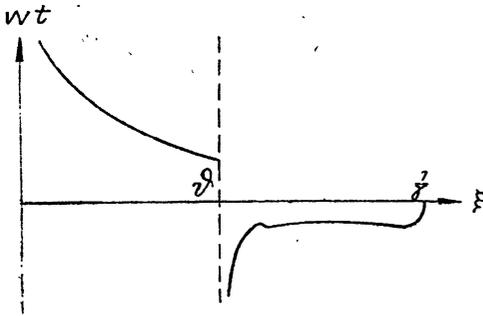


Рис. 10

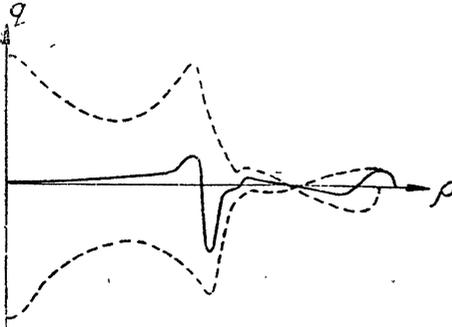


Рис. 11

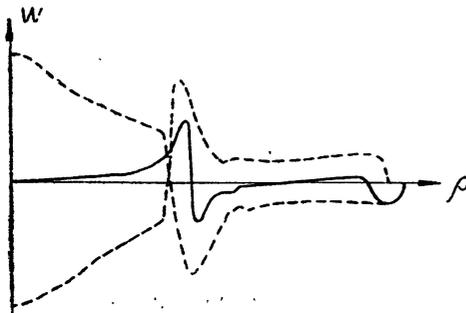


Рис. 12

средоточенного импульса. Это достигается при  $n < \infty$  простым наложением смещений, соответствующих задачам о включенных (в различные моменты времени) двух одинаковых, но противоположно направленных силах (рис. 11, 12).

4. Исследование возмущений при  $z > 0$  и  $\rho \neq 0$ . Выполнение всесторонних количественных исследований поля упругих смещений во внутренних точках полупространства, не расположенных на оси симметрии, представляет уже более трудную задачу. Для решения этой задачи удобно пользоваться методом разложения в ряды. Мы рассмотрим сейчас подобный метод, позволяющий получать хорошие количественные результаты при сравнительно небольших значениях величин  $\xi = \frac{b\rho}{t}$  и  $\eta = \frac{bz}{t}$ .

Воспользуемся формулами (25,1) при  $n = \infty$ , пути  $(L_1^0)$  и

( $l_2^0$ ) интегрирования в которых идут так, что оставляют по разные стороны от себя точку  $\zeta = 0$  и, соответственно, точки

$$\zeta_1 = \frac{-i\xi \cos \lambda + \eta \sqrt{1 - \gamma^2 (\xi^2 \cos^2 \lambda + \eta^2)}}{1 - \gamma^2 \eta^2};$$

$$\zeta_2 = \frac{-i\xi \cos \lambda + \eta \sqrt{1 - (\xi^2 \cos^2 \lambda + \eta^2)}}{1 - \gamma^2}. \quad (12,6)$$

Деформируя контуры интегрирования в интегралах (25,1) в левую полуплоскость так, как это указано на рис. 13 сплошной линией ( $l'$ ) [или же — пунктирной линией ( $l''$ )], мы выделим из интегралов статические части (или же — статические и релейевские части), представляющиеся простыми формулами (3,3) [или же формулами (3,3) и (8,3)] при  $n = \infty$ .

Предположим теперь, что  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  имеют такие значения, что

$$\left| \frac{\eta \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - ix_t}{\zeta} \right| \leq q < 1;$$

$$\left| \frac{\eta \sqrt{1 + \zeta^2} - ix_t}{\zeta} \right| \leq q < 1, \quad (13,6)$$

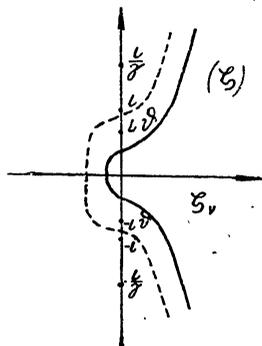


Рис. 13

где  $x_t = \xi \cos \lambda$ . [Очевидно, что при малых  $\xi$ ,  $\eta$  и точках  $\zeta$  на контурах ( $l'$ ) и ( $l''$ ), проходящих не слишком близко к точкам  $\zeta = 0$  и  $\zeta = \zeta_1$ ,  $\zeta = \zeta_2$  из (12,6), такие неравенства действительно имеют место]. Тогда можно воспользоваться формулой геометрической прогрессии и разложить выражения

$$\frac{1}{\frac{t}{b} \zeta \left[ 1 - \frac{\eta \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - ix_t}{\zeta} \right]}, \quad \frac{1}{\frac{t}{b} \zeta \left[ 1 - \frac{\eta \sqrt{1 + \zeta^2} - ix_t}{\zeta} \right]}$$

в ряды по степеням  $[\eta \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - ix_t] \zeta^{-1}$ ,  $[\eta \sqrt{1 + \zeta^2} - ix_t] \zeta^{-1}$ .

[Заметим, что в случае перехода в (25,1) к контуру ( $l'$ ) следует оставлять в упомянутых разложениях лишь члены с нечетными степенями  $\zeta^{-1}$ . Действительно, вычисление интегралов по контуру ( $l'$ ) (рис. 13) от слагаемых с четными степенями  $\zeta^{-1}$ , производимое по вычету в точке  $\zeta = 0$ , дает, очевидно, нуль.]

Подставляя наши ряды в (25,1) и выполняя интегрирование по параметру  $\lambda$ , получим для оставшейся (после вычисления статических слагаемых) части смещений формулы

$$\begin{aligned}
 q_{\lambda R} = & -\frac{1}{2\pi\mu} \frac{t}{b} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{(V)} \frac{2+\zeta^2}{\zeta^2 R(\zeta)} \left[ \frac{c_1^1 \frac{1}{2} (-i\xi)}{\zeta} + \right. \right. \\
 & + \frac{c_3^1 \frac{1}{2} (-i\xi) \eta^2 \alpha^2 + c_3^3 \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (-i\xi)^3}{\zeta^3} + \\
 & + \frac{c_5^1 \frac{1}{2} (-i\xi) \eta^4 \alpha^4 + c_5^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (-i\xi)^3 \eta^2 \alpha^2 + c_5^5 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (-i\xi)^5}{\zeta^5} + \\
 & \left. \left. + \dots \right] d\zeta - \frac{1}{2\pi} \int_{(V')} \frac{2\alpha\beta}{\zeta^2 R(\zeta)} \left[ \frac{c_1^1 \frac{1}{2} (-i\xi)}{\zeta} + \right. \right. \\
 & + \frac{c_3^1 \frac{1}{2} (-i\xi) \eta^2 \beta^2 + c_3^3 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (-i\xi)^3}{\zeta^3} + \\
 & + \frac{c_5^1 \frac{1}{2} (-i\xi) \eta^4 \beta^4 + c_5^3 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (-i\xi)^3 \eta^2 \beta^2 + c_5^5 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (-i\xi)^5}{\zeta^5} + \\
 & \left. \left. + \dots \right] d\zeta \right\}, \quad (14,6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{\lambda R} = \frac{1}{2\pi\mu} \frac{t}{b} & \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{(l')} \frac{(2+\zeta^2)\alpha}{\zeta^2 R(\zeta)} \left[ \frac{c_1^0 \eta \alpha}{\zeta} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{c_3^0 \eta^3 \alpha^3 + c_3^2 \eta \alpha}{\zeta^3} \frac{1}{2} (-i\xi)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{c_5^0 \eta^5 \alpha^5 + c_5^2 \eta^3 \alpha^3}{\zeta^5} \frac{1}{2} (-i\xi)^2 + c_5^4 \eta \alpha \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (-i\xi)^4 + \dots \right] d\zeta - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2\pi i} \int_{(l'')} \frac{2\alpha}{\zeta^2 R(\zeta)} \left[ \frac{c_1^0 \eta \beta}{\zeta} + \frac{c_3^0 \eta^3 \beta^3 + c_3^2 \eta \beta}{\zeta^3} \frac{1}{2} (-i\xi)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{c_5^0 \eta^5 \beta^5 + c_5^2 \eta^3 \beta^3}{\zeta^5} \frac{1}{2} (-i\xi)^2 + c_5^4 \eta \beta \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (-i\xi)^4 + \dots \right] d\zeta \right\}, \quad (14,6)
 \end{aligned}$$

в которых обозначено  $\alpha = \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}$  и  $\beta = \sqrt{1 + \zeta^2}$ .

Заметим, что подинтегральные функции в (14,6) являются однозначными на плоскости ( $\zeta$ ) с разрезами, проведенными между точками  $i, \frac{i}{\gamma}$  и  $-\frac{i}{\gamma}, -i$ . Особенности же функций расположены в точках  $\zeta = 0$  и  $\zeta = \pm i\vartheta$ .

Формулы (14,6) позволяют представлять выражения  $q_{\lambda R}$  и  $w_{\lambda R}$  рядами, расположенными по степеням  $\xi$  и  $\eta$ . При этом вычисление коэффициентов упомянутых рядов можно производить различными способами.

Во-первых, можно деформировать контур ( $l'$ ) в правую полуплоскость и производить вычисление интегралов по вычетам в точке  $\zeta = 0$ . Во-вторых, можно деформировать контур ( $l''$ ) в контуры, обходящие разрезы, проведенные между точками  $i, \frac{i}{\gamma}$  и  $-\frac{i}{\gamma}, -i$ , и сводить вычисление интегралов (14,6) к вычислению вычетов в релеевских корнях  $\zeta = \pm i\vartheta$ , а также — к сравнительно простым интегралам по упомянутым разрезам.

Мы не будем сейчас останавливаться на сравнении достоинств и недостатков указанных способов вычисления, так как этот вопрос будет уместно подробно осветить в следую-

щей работе, посвященной детальному изучению волновых процессов в упругой среде в окрестности точек приложения динамического воздействия.

Точно так же мы не будем сейчас приводить примеров численных расчетов полей упругих смещений и не станем указывать наглядных графических приемов для суждения о динамическом режиме в различных точках упругого полупространства. Все эти вопросы нам представляются весьма важными в практическом отношении и мы считаем уместным посвятить им самостоятельное исследование.

### ГЛАВА III

#### АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ О ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В настоящей главе мы произведем некоторые исследования (имеющие отношение к сейсморазведке) решений двух задач для полупространства из §§ 1 и 2. Во-первых, мы исследуем, по обычной для сейсморазведки схеме, решение (17,1) (при  $n = \infty$ ) задачи, соответствующей воздействию (10,1), приложенному в точке  $\rho = 0$ ,  $z = 0$  границы полупространства. Во-вторых, мы рассмотрим решение задачи о полупространстве при внутреннем источнике возмущения и поставим на обсуждение вопросы об изменении интенсивностей, падающих на граничную поверхность  $z = 0$  волн при их отражении от упомянутой поверхности.

1. Не обращаясь еще к основным задачам настоящего параграфа, остановимся сперва на некоторых вопросах, касающихся измерительных приборов, применяемых в сейсморазведке для регистрации поля смещений. При этом будем считать, что исследуется какая-то компонента  $u(\rho, z, t)$  поля смещений, и будем предполагать, что эта компонента может быть представлена интегралом Фурье

$$u(\rho, z, t) = \int_0^{\infty} f(\rho, z, \nu) \begin{cases} \cos \nu t \\ \sin \nu t \end{cases} d\nu,$$

в котором  $f(\rho, z, \nu)$  является всюду непрерывной функцией.

В основу рабочей схемы прибора, которым регистрируется поле  $u(\rho, z, t)$ , могут быть положены различные принципы. Во-первых, принципиально возможно рассчитать прибор так, чтобы он регистрировал все возмущение

$u(\rho, z, t)$ . Во-вторых, можно связать чувствительные элементы прибора с некоторыми механическими (или электрическими) колебательными системами, на которые воздействует не все возмущение  $u(\rho, z, t)$ , а лишь его часть, соответствующая некоторому промежутку интегрирования по частоте  $\nu$ . Если упомянутый промежуток берется так, что прибор регистрирует вместо  $u(\rho, z, t)$  лишь возмущение

$$u(\rho, z, t; \nu_0, \Delta\nu_0) = \int_{\nu_0}^{\nu_0 + \Delta\nu_0} f(\rho, z, \nu) \begin{cases} \cos \nu t \\ \sin \nu t \end{cases} d\nu,$$

при „больших“ значениях  $\nu_0$ , то говорят, что прибор работает на „высокочастотном режиме“. В сейсморазведке, как известно, пользуются высокочастотными приборами, в которых величины  $\nu_0$  и  $\Delta\nu_0$ , могут изменяться в зависимости от настройки.

Из сказанного следует, что показания всякого высокочастотного прибора [регистрирующего вместо истинного поля  $u(\rho, z, t)$  поле  $u(\rho, z, t; \nu_0, \Delta\nu_0)$ ] существенно отличаются от значений исследуемого поля, особенно в случае малых значений  $\Delta\nu_0$ . Но если  $\Delta\nu_0$  бесконечно велико (или же очень велико) и если наблюдателя не столь интересует суммарное поле  $u(\rho, z, t)$  в каждой точке пространства и времени, сколь ему важно лишь иметь количественные и качественные характеристики распространяющихся в поле разрывов, то упомянутые искажения перестают быть существенными. Действительно, для исследования распространения разрывов  $u(\rho, z, t)$  не играет роли результат интегрирования  $f(\rho, z, \nu) \begin{cases} \cos \nu t \\ \sin \nu t \end{cases}$  по конечному промежутку  $0 \leq \nu \leq \nu_0$ .

так как все разрывы функции  $u(\rho, z, t)$  возникают лишь из-за неравномерной сходимости интеграла на его бесконечном пределе.

Итак, мы видим, что высокочастотный сейсмический прибор, с широкой (или, точнее, с бесконечно широкой) полосой пропускания  $\Delta\nu_0$ , вполне пригоден для исследования распространения разрывов поля смещений.

Что же касается показаний такого прибора в фиксированных точках пространства и времени, особенно в точках, удаленных от поверхностей разрывов, то эти показания могут не иметь ничего общего с истинными значениями поля. Это утверждение есть следствие того обстоятельства,

что неучитываемая высокочастотным прибором часть поля смещений, представляемая интегралом

$$\int_0^{v_0} f(\rho, z, v) \begin{cases} \cos vt \\ \sin vt \end{cases} dv,$$

оказывается, вообще говоря, величиной такого же порядка, как и возмущение  $u(\rho, z, t; v_0, \infty)$ , фиксируемое прибором. Таким образом, вдали от поверхностей разрывов показания высокочастотного прибора едва ли возможно связать с простыми физическими характеристиками поля упругих смещений.

Во всем дальнейшем будем считать, что исследование поля упругих смещений производится высокочастотным сейсмическим прибором. Поэтому цель теоретических исследований должна будет заключаться в изучении качественных и количественных закономерностей, определяющих лишь распространение разрывов поля.

2. При решении задач для упругого полупространства в § 1 и § 2, мы представляли составляющие вектора упругих смещений интегралами Фурье-Бесселя

$$u_n(\rho, z, t) = \int_0^{\infty} \varphi_n(z, t, k) J_n(k\rho) dk,$$

(при  $n=0,1$ ) в которых  $\varphi_n(z, t, k)$  являлись непрерывными функциями своих аргументов.

Выше уже говорилось о том, что нас должны интересовать лишь разрывы функций  $u_n(\rho, z, t)$ . Но упомянутые разрывы возникают лишь из-за нарушения равномерной сходимости интегралов на их бесконечном пределе интегрирования. Поэтому для изучения разрывов нам будет достаточно произвести исследование функций  $\varphi_n(z, t, k)$  при значениях  $k > k_0$ , где  $k_0$  — любое „большое“ фиксированное число, и вычислить (или оценить) следующие интегралы:

$$u_n(\rho, z, t; k_0) = \int_{k_0}^{\infty} \varphi_n(z, t, k) J_n(k\rho) dk.$$

Такого рода исследования позволяют пользоваться асимптотическими методами и оказываются весьма простыми.

В заключение нашего вводного замечания полезно отметить, что для вычисления показаний высокочастотного

прибора, помещенного в некоторую точку поля  $u_n(\rho, z, t)$ , необходимо представить составляющие вектора упругих смещений (определенные нами посредством интегралов Фурье-Бесселя) в виде тригонометрических интегралов от носителя по времени. Мы увидим в §7, что такое представление может быть получено без каких бы то ни было принципиальных затруднений. Но мы склонны думать, что ему, равно как и самим показаниям высокочастотного прибора в фиксированных точках поля, не следует придавать существенного физического значения.

§7. Исследование решения задачи при сосредоточенном граничном воздействии (10,1)

Как было показано в §1, составляющие поля смещений нашей задачи определяются формулами (17,1) при  $n = \infty$ . Перепишем указанные формулы следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q(\rho, z, t) &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty [Q^{(1)}(z, t, k) + Q^{(2)}(z, t, k)] J_1(k\rho) dk, \\ \omega(\rho, z, t) &= \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty [W^{(1)}(z, t, k) + W^{(2)}(z, t, k)] J_0(k\rho) dk, \end{aligned} \right\} (1,7)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} Q^{(1)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(2 + \zeta^2) e^{\frac{k}{b} \zeta - kz \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}}{\zeta R(\zeta)} d\zeta, \\ Q^{(2)} &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} e^{\frac{k}{b} \zeta - kz \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}}{\zeta R(\zeta)} d\zeta; \end{aligned} \right\} (2,7)$$

$$\left. \begin{aligned} W^{(1)} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(2 + \zeta^2) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} e^{\frac{k}{b} \zeta - kz \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}}{\zeta R(\zeta)} d\zeta, \\ W^{(2)} &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} e^{\frac{k}{b} \zeta - kz \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}}{\zeta R(\zeta)} d\zeta, \end{aligned} \right\} (3,7)$$

и ограничимся рассмотрением лишь вертикальной составляющей  $w(\rho, z, t)$ . Все полученные результаты смогут быть автоматически распространены и на случай продольной составляющей  $q$  поля смещений.

В соответствии со сказанным в начале третьей главы, будем производить исследование интегралов (2,7) и (3,7) при „больших“ значениях числа  $k$ , или, точнее, тогда, когда выполняются следующие неравенства:

$$k \frac{t}{b} \gg \gg 1; \quad \frac{k}{b} \sqrt{t^2 - b^2 z^2} \gg \gg 1$$

или

$$\frac{k}{b} \sqrt{t^2 - a^2 z^2} \gg \gg 1.$$

При этом будем пользоваться плоскостью переменной ( $\zeta$ ) с разрезами, идущими на бесконечность из точек разветвления  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$  параллельно отрицательной части вещественной оси и будем определять на этой плоскости ветви радикалов условиями (12<sub>1</sub>, 1).

1. Перехода в формулах (3,7) от путей интегрирования  $\text{Re } \zeta = \sigma > 0$  к контуру ( $\lambda$ ), изображенному на рис. 13, и замечая, что при таком переходе пересекаются полюсы подинтегральных функций в точках  $\zeta = 0$  и  $\zeta = \pm i\vartheta$ , мы представляем функции  $W^\nu$  из (3,7) в виде сумм

$$W^{(\nu)} = W_0^\nu + W_R^{(\nu)} + W_\lambda, \quad (4,7)$$

в которых  $W_0^{(\nu)}$  являются вычетами подинтегральных функций в начале координат,  $W_R^{(\nu)}$  представляют суммы вычетов подинтегральных функций в корнях  $\zeta = \pm i\vartheta$  уравнения Релея (1,3), а  $W_\lambda^{(\nu)}$  представляются интегралами (3,7), распространенными по контуру ( $\lambda$ ).

В § 3 уже было показано, что подстановка в (1,7) вместо  $W^\nu$  первых и вторых слагаемых из (4,7) приводит к выражениям (3,3) и (4,3) для статической и релеевской частей поля упругих смещений. Об этих частях смещений много говорилось во второй главе. Поэтому будем сейчас рассматривать лишь третьи слагаемые из (4,7), представляющиеся интегралами (3,7) [путь интегрирования в которых заменен контуром ( $\lambda$ )], описывающими распространение

объемных продольных и поперечных волн. При этом нас будет интересовать результат подстановки  $W_\lambda^{(v)}$  не во вторую формулу (1,7), а в выражение

$$\tilde{w}_\lambda = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{k_0}^{\infty} [W_\lambda^{(1)}(z, t, k) + W_\lambda^{(2)}(z, t, k)] J_0(k\rho) dk, \quad (5, 7)$$

нижним пределом интегрирования в котором является „большое“ число  $k_0$ . Такое выражение, как уже упоминалось, определяет разрывы поля смещений или его производных и позволяет установить количественные закономерности поведения поля в окрестности поверхностей разрывов.

2. Идея и основные этапы асимптотического исследования интегралов вида (3,7) были изложены в работе<sup>[9]</sup>. Поэтому сейчас можно ограничиться освещением лишь наиболее существенных для нашей цели обстоятельств.

Рассмотрим сначала первый интеграл из (3,7) и запишем его в каноническом виде

$$W_\lambda^{(2)} = \int_{(\lambda)} F(\zeta) e^{-Nf(\zeta)} d\zeta, \quad (6,7)$$

где положено:

$$f(\zeta) = \xi \sqrt{1 + \gamma^2 - \zeta^2} - \zeta; \quad (7,7)$$

$$\xi = \frac{zb}{t} < \frac{1}{\gamma}; \quad N = k \frac{t}{b}; \quad (7,7)$$

$$F(\zeta) = \frac{(2 + \zeta^2) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}{2\pi i \zeta [(2 + \zeta^2)^2 - 4\sqrt{1 + \gamma^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]}. \quad (7,7)$$

Будем считать число  $N$  весьма большим и воспользуемся методом стационарной фазы<sup>[9]</sup>, причем ограничимся выделением лишь главных членов  $W_\lambda^{(1)}$  в двух случаях: во-первых, при  $z > 0$  и, во-вторых,  $z = 0$ . (Первый случай нам будет полезен для установления общей картины распространения разрывов в полупространстве).

Седловые точки

$$\zeta_1 = \frac{i}{\gamma \sqrt{1 - \gamma^2 \zeta^2}}; \quad \zeta_2 = \frac{-i}{\gamma \sqrt{1 - \gamma^2 \zeta^2}} \quad (8,7)$$

функции  $f(\zeta)$ , определяемые из условия  $f'(\zeta) = 0$ , распола-



В случае же  $z=0$  главная часть  $W_\lambda^{(1)}$  оказывается следующей:

$$W_\lambda^{(1)} = \left\{ \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \cdot \frac{\gamma^3}{1-2\gamma^2} \left(\frac{b}{kt}\right)^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{kt}{a} - \frac{\pi}{4}\right) - \right. \\ \left. - 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-\gamma^2) \left(\frac{b}{kt}\right)^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{kt}{b} - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{kt}\right) \right]. \quad (10,7)$$

Перейдем теперь к рассмотрению второго интеграла из (3,7) (обращающегося в нуль при  $bz > t$ ) и запишем этот интеграл в следующем виде:

$$W_\lambda^{(2)} = \int \tilde{F}(\zeta) e^{-N\varphi(\zeta)} d\zeta, \quad (11,7)$$

где обозначено

$$\varphi(\zeta) = \xi \sqrt{1 + \zeta^2} - \zeta; \quad (12,1,7)$$

$$\xi = \frac{bz}{t} < 1; \quad N = k \frac{t}{b}; \quad (12,2,7)$$

$$\tilde{F}(\zeta) = \frac{-\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}{\pi i \zeta [(2 + \zeta^2)^2 - 4\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]} \quad (12,3,7)$$

Седловые точки

$$\zeta_1^0 = \frac{i}{\sqrt{1 - \xi^2}}; \quad \zeta_2^0 = \frac{-i}{\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (13,7)$$

функции  $\varphi(\zeta)$  располагаются вне промежутка  $\left(-\frac{i}{\gamma}, \frac{i}{\gamma}\right)$  только в том случае, если выполняется неравенство  $t > bz > t\sqrt{1 - \gamma^2}$ . Если же имеет место  $bz < t\sqrt{1 - \gamma^2}$ , то седловые точки оказываются расположенными в промежутках  $\left(-\frac{i}{\gamma}, -i\right)$  и  $\left(i, \frac{i}{\gamma}\right)$ .

Рассмотрим сперва случай  $bz > t\sqrt{1 - \gamma^2}$ .

Выбирая в качестве  $(\lambda)$  в (11,7) контур, совпадающий со стационарными контурами функций (12,7) в окрестности седловых точек (13,7), убеждаемся в том, что подинтегральная функция имеет на контуре резкие максимальные значения лишь в седловых точках  $\zeta_0^0$ . Поэтому для главных частей  $W_\lambda^{(2)}$  (при значениях  $N \gg 1$ ) получается выражение

$$W_\lambda^{(2)} = B(z, t) \frac{\sin \left[ \frac{k}{b} \sqrt{t^2 - b^2 z^2} - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{k}} \times \left[ 1 + O \left( \frac{b}{kz \sqrt{t^2 - b^2 z^2}} \right) \right], \quad (14,7)$$

где

$$B(z, t) = 2 \sqrt{2\pi b} \frac{bz}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{|\sqrt{\zeta_1^0} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_1^{02}}|}{\left[ (2 + \zeta_1^{02})^2 - 4 \sqrt{1 + \zeta_1^{02}} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_1^{02}} \right]}, \quad (15,7)$$

а  $\zeta_1^0$  имеет значение из (13,7) и (12,7).

Пусть теперь будет  $0 < bz < t \sqrt{1 - \gamma^2}$ . Выберем в качестве  $(\lambda)$  в (11,7) кривую, изображенную на рис. 15, совпадающую на участках, прилегающих к седловым точкам

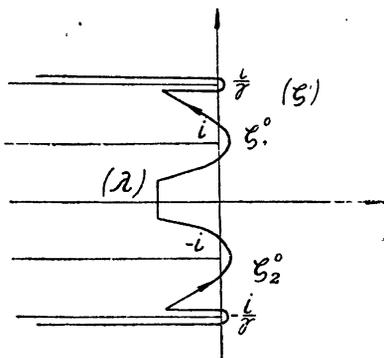


Рис. 15

$\zeta_0^0$  со стационарными контурами  $\text{Im } \varphi(\zeta) = \text{Im } \varphi(\zeta_0^0)$ , функции (12,7) и обходящую разрез  $\pm \frac{i}{\gamma}$ . При движении по такому контуру функция  $\exp(-N\varphi(\zeta))$  будет иметь резкие максимальные значения в седловых точках  $\zeta_0^0$ , а также в точках  $\pm \frac{i}{\gamma}$  (при этом рез-

кость максимумов будет тем большей, чем большее значение имеет число  $N$ ). Поэтому (при  $N \gg 1$ ) главное значение интеграла определится в результате интегрирования по окрестностям седловых точек  $\zeta_0^0$  и точек  $\pm \frac{i}{\gamma}$ .

Проводимые стандартным образом вычисления приводят к формуле

$$\begin{aligned}
 W_{\lambda}^{(2)} = & \left\{ c_2(z, t) \frac{\sin\left(\frac{k}{b} \sqrt{t^2 - b^2 z^2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{k}} - \right. \\
 & - c_1(z, t) \frac{\cos\left(\frac{k}{b} \sqrt{t^2 - b^2 z^2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{k}} \left. \right\} \left\{ 1 + O\left[\frac{b}{zk\sqrt{t^2 - b^2 z^2}}\right] \right\} + \\
 & + D(z, t) \frac{\cos\left(k \frac{t}{a} - k \frac{z}{\gamma} \sqrt{1 - \gamma^2} - \frac{\pi}{4}\right)}{k \sqrt{k}} \times \\
 & \times \left\{ 1 + O\left[\frac{b}{k(t\sqrt{1 - \gamma^2} - bz)}\right] \right\}, \quad (16,7)
 \end{aligned}$$

в которой обозначено

$$\begin{aligned}
 c_1(z, t) = & \frac{2\sqrt{2b}bz}{\sqrt{\pi}(t^2 - b^2 z^2)^{\frac{3}{4}}} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{|1 + \gamma^2 \zeta_1^{02}|^2 (2 + \zeta_1^{02})^2}}{|\zeta_1^{01}| [(2 + \zeta_1^{02})^4 + 16|1 + \zeta_1^{02}| |1 + \gamma^2 \zeta_1^{02}|]}, \\
 c_2(z, t) = & \frac{8\sqrt{2b}bz}{\sqrt{\pi}(t^2 - b^2 z^2)^{\frac{3}{4}}} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{|1 + \zeta_1^{02}| |1 + \gamma^2 \zeta_1^{02}|}}{|\zeta_1^{01}| [(2 + \zeta_1^{02})^4 + 16|1 + \zeta_1^{02}| |1 + \gamma^2 \zeta_1^{02}|]}, \\
 D(z, t) = & 2\sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2} \left[ \frac{b\sqrt{1 - \gamma^2}}{t\sqrt{1 - \gamma^2} - bz} \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (17,7)
 \end{aligned}$$

а  $\zeta_1^0$  имеет значение из (13,7) и (12,7).

Если, наконец,  $z = 0$ , то оценка  $W_{\lambda}^{(2)}$  сводится к вычислению интегралов (11,7) по контурам, обходящим разрез

проведенные из точек  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$ . Для функции  $W_\lambda^{(2)}$  в этом случае получается выражение

$$W_\lambda^{(2)} = \left[ b_1(t) \frac{\cos\left(\frac{kt}{b} - \frac{\pi}{4}\right)}{k\sqrt{k}} + b_2(t) \frac{\cos\left(\frac{kt}{a} - \frac{\pi}{4}\right)}{k\sqrt{k}} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{b}{kt}\right) \right], \quad (18,7)$$

в котором обозначено

$$\left. \begin{aligned} b_1(t) &= 8\sqrt{\frac{2}{\pi}} (1-\gamma^2) \left(\frac{b}{t}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ b_2(t) &= \sqrt{\frac{2\gamma}{\pi}} \frac{2\gamma}{(2-\frac{1}{\gamma^2})^2} \left(\frac{b}{t}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \right\} (19,7)$$

3. Теперь мы должны обратиться к рассмотрению результатов подстановки выражений  $W_\lambda^{(v)}$  в правую часть формулы (5,7) и к обсуждению получающихся при этом физических следствий.

Начнем с поля продольной волны, вертикальная составляющая которого представляется формулой

$$(\tilde{w}_\lambda)_{\text{пр.}} = \frac{1}{2\pi\mu} \int_{k_0}^{\infty} \tilde{w}_\lambda^{(1)}(z, t, k) J_0(k\rho) dk, \quad (20,7)$$

причем будем сначала считать, что  $z > 0$ .

Пользуясь формулой (9,7), а также асимптотическим представлением функции Бесселя, получаем для главной части  $(\tilde{w}_\lambda)_{\text{пр.}}$  выражение

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_\lambda)_{\text{пр.}} &= \frac{A(z, t)}{\pi\sqrt{2\pi\rho\mu}} \int_{k_0}^{\infty} \sin\left[\frac{k}{a}\sqrt{t^2 - a^2z^2} - \frac{\pi}{4}\right] \times \\ &\times \cos\left(k\rho - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dk}{k} = \frac{A(z, t)}{2\pi\sqrt{2\pi\rho\mu}} \int_{k_0}^{\infty} \left\{ \sin k\xi_a + \right. \\ &\left. + \cos k\eta_a \right\} \frac{dk}{k}, \quad (21,7) \end{aligned}$$

в котором обозначено:

$$\xi_a = \frac{1}{a} \sqrt{t^2 - a^2 z^2} - \rho, \quad \eta_a = \frac{1}{a} \sqrt{t^2 - a^2 z^2} + \rho. \quad (22,7)$$

Нетрудно видеть, что второй интеграл из (21,7) является непрерывной функцией от  $\eta_a$ . Первый же интеграл, принимающий значение

$$\int_{k_0}^{\infty} \sin k \xi_a \frac{dk}{k} = \text{sign } \xi_a \int_{k_0|\xi_a|}^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda,$$

имеет при переходе через точки поверхности  $\xi_a = 0$  конечный разрыв непрерывности, равный  $\pi$ .

Итак видим, что при переходе через сферу  $\xi_a = 0$  вертикальная составляющая поля смещения испытывает конечный скачок, мерой интенсивности которого в различных

точках сферы служит функция  $A(z, t) \rho^{-\frac{1}{2}}$ .

Перейдем теперь к рассмотрению граничных точек  $z = 0$ , причем будем одновременно учитывать части полей, появившиеся из-за продольного и поперечного потенциалов.

Складывая формулы (10,7) и (18,7), получаем

$$W_{\lambda}^{(1)} + W_{\lambda}^{(2)} = \frac{a_1}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{\cos \left[ \frac{kt}{b} - \frac{\pi}{4} \right]}{k \sqrt{k}} + \frac{a_2}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{\cos \left[ \frac{kt}{a} - \frac{\pi}{4} \right]}{k \sqrt{k}}, \quad (23,7)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  являются постоянными, значения которых мы не будем выписывать.

Подставляя правую часть (23,7) в (5,7) и пользуясь асимптотическим представлением функции Бесселя, находим для поверхностных значений вертикальной составляющей  $\tilde{w}_{\lambda}$  следующее выражение

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{\lambda} = & \frac{a_1}{2\pi\mu t \sqrt{2\pi\rho t}} \int_{k_0}^{\infty} \left[ \frac{\cos k \left( \frac{t}{b} - \rho \right)}{k^2} + \frac{\sin k \left( \frac{t}{b} + \rho \right)}{k^2} \right] dk + \\ & + \frac{a_2}{2\pi\mu t \sqrt{2\pi\rho t}} \int_{k_0}^{\infty} \left[ \frac{\cos k \left( \frac{t}{a} - \rho \right)}{k^2} + \frac{\sin k \left( \frac{t}{a} + \rho \right)}{k^2} \right] dk. \quad (24,7) \end{aligned}$$

Последние формулы показывают, что на границе  $z=0$  полупространства вертикальная составляющая  $w_\lambda$  поля смещений не имеет разрывов непрерывности. Производные же  $w_\lambda$  по  $t$  и  $\rho$  испытывают разрыв непрерывности первого рода в точках  $t=a\rho$  и  $t=b\rho$ . При этом упомянутые производные могут вычисляться путем дифференцирования под знаками интегралов.

Обратимся теперь к рассмотрению поперечной волны. Пусть сперва будет  $bz > t\sqrt{1-\gamma^2}$ .

Подставляя в (5,7) значение  $W_\lambda^{(2)}$  из (14, 7) и пользуясь асимптотическим представлением  $J_0(k\rho)$ , получаем формулу

$$(w_\lambda)_{\text{поп.}} = \frac{B(z, t)}{2\pi\mu\sqrt{2\pi\rho}} \int_{k_0}^{\infty} \{\sin k\xi_b - \cos k\eta_b\} \frac{dk}{k}, \quad (25, 7)$$

где

$$\xi_b = \frac{1}{b} \sqrt{t^2 - b^2 z^2} - \rho; \quad \eta_b = \frac{1}{b} \sqrt{t^2 - b^2 z^2} + \rho, \quad (25, 7)$$

из которой видно, что при переходе через точки поверхности  $\xi_b=0$ ;  $bz > t\sqrt{1-\gamma^2}$  вертикальная составляющая поля смещений испытывает разрыв непрерывности такого же рода, как и при переходе через поверхность  $\xi_a=0$ .

Пусть теперь будет  $0 < bz < t\sqrt{1-\gamma^2}$ . Тогда для выяснения картины распространения разрывов поля  $(\tilde{w}_\lambda)_{\text{поп.}}$  следует воспользоваться формулами (16,7). Подставляя (16,7) в (5,7), получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_\lambda)_{\text{поп.}} = & \frac{c_2(z, t)}{2\pi\mu\sqrt{2\pi\rho}} \times \\ & \times \int_{k_0}^{\infty} \{\sin k\xi_b - \cos k\eta_b\} \frac{dk}{k} - \\ & - \frac{c_1(z, t)}{2\pi\mu\sqrt{2\pi\rho}} \int_{k_0}^{\infty} \{\cos k\xi_b + \sin k\eta_b\} \frac{dk}{k} + \\ & + \frac{D(z, t)}{2\pi\mu\sqrt{2\pi\rho}} \int_{k_0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos kx}{k^2} + \frac{\sin k\theta}{k^3} \right\} dk, \end{aligned} \quad (26, 7)$$

где  $\xi_b$  и  $\eta_b$  имеют значения (25,7), а  $x$  и  $\theta$  определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{t}{a} - \frac{z}{\gamma} \sqrt{1-\gamma^2} - \rho; \\ \theta &= \frac{t}{a} - \frac{z}{\gamma} \sqrt{1-\gamma^2} + \rho. \end{aligned} \right\} (27,7)$$

Первые слагаемые в (26,7) имеют такую же структуру, как и слагаемые в (25,7) и имеют в точности такие же разрывы. Вторые слагаемые в (26,7) обращаются в бесконечность (по логарифмическому закону), если  $|\xi_b| \rightarrow 0$ . И, наконец, третьи слагаемые в (26,7) представляют собой всюду непрерывные функции, производные которых испытывают разрыв непрерывности первого рода на усеченном конусе, определяемом уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{t}{a} - \frac{z}{\gamma} \sqrt{1-\gamma^2} - \rho = 0, \\ \rho &\geq 0, \quad bz < t\sqrt{1-\gamma^2}. \end{aligned} \right\} (28,7)$$

Полезно заметить, что положение фронта волны (28,7) (природа возникновения которой в точности совпадает с природой возникновения волн Минтропа) легко может быть получено построением геометрической оптики упругих волн, произведенном на рис. 16.

На рисунке изображено сечение полупространства плоскостью, проходящей через ось  $OZ$  (ось симметрии в нашей задаче), четверть окружности  $AA'$  изображает положение фронта продольной волны, распространяющейся со скоростью  $\frac{1}{a}$ . Четверть окружности с  $CBC'$  изображает положение фронта поперечной волны, распространяющейся со скоростью  $\frac{1}{b}$ . Касательная  $AB$  к дуге  $CC'$  изображает положение фронта волны (28,7). Существенно подчеркнуть, что „лучи“, определяющие направление распространения волны (28,7), образуют с нормалью к границе

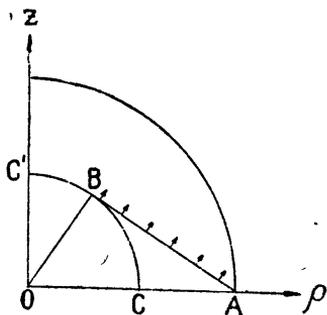


Рис. 16

полупространства угол  $\beta_0 = \arcsin \gamma$ ;  $\gamma = \frac{a}{b}$ . Угол  $\beta_0$ , очевидно, равняется предельному углу полного внутреннего отражения на границе полупространства и пустоты.

4. В заключение параграфа следует остановиться на обсуждении полученных результатов с точки зрения возможностей экспериментального их обнаружения. При этом рассмотрим как сейсмический прибор, работающий на высокочастотном режиме, так и прибор, регистрирующий суммарную величину поля смещений.

Предположим сперва, что измерение производится при помощи прибора, регистрирующего суммарную величину поля смещений. Пусть прибор расположен внутри полупространства  $z > 0$  и пусть мимо него проходит волна  $\xi_a = 0$ . Тогда, очевидно, показания прибора, касающиеся величины разрыва в вертикальной составляющей поля смещений, в точности совпадут с результатами, вытекающими из (21,7). Что же касается значений  $w$  в фиксированных точках поля, то результаты, вытекающие из формул (21,7), (25,7) [или же (26,7)], а также из (3,3) и (8,3), могут уже отличаться от показаний нашего прибора. Это утверждение есть следствие того обстоятельства, что интеграл (берущийся в промежутке от 0 до  $k_0$ ), отброшенный в (5,7), может оказаться таким же по величине, как и все учитываемые нам члены.

Подобным же образом обстоит дело и в случае прохождения мимо прибора волны  $\xi_b = 0$ . Разница будет заключаться лишь в том, что из-за бесконечно больших значений смещений на поверхности  $\xi_b = 0$  можно утверждать, что не только в точках  $\xi_b = 0$ , но и в некоторой окрестности упомянутой поверхности показания прибора окажутся близкими к результатам, вытекающим из формулы (26,7).

Что касается всех других точек поля упругих смещений, в том числе и точек, расположенных в окрестности фронта  $x = 0$ , или же точек  $\rho = \frac{t}{a}$  и  $\rho = \frac{t}{b}$  на поверхности полупространства, то можно утверждать, что показания прибора, регистрирующего в этих точках суммарную величину поля смещений, вообще говоря, не будут совпадать с теми данными, которые вытекают из предыдущих наших формул. Такое заключение есть следствие того обстоятельства, что отброшенные в формуле (5,7) выражения, соответствующие результатам интегрирования по промежутку от 0 до  $k_0$ , могут оказаться по величине такими же, как

и выражения, учтенные нами. (При этом, конечно, значения разрывов полей производных  $\vec{u}$  в точках  $x=0$ ;  $\rho = \frac{t}{a}$  и  $\rho = \frac{t}{b}$ , измеренные прибором, должны совпадать с результатами, вытекающими из наших формул).

Будем теперь считать, что исследование поля смещений производится при помощи высокочастотного сейсмического прибора.

Тогда, на основании сказанного во введении к настоящей главе, можно утверждать, что частотный прибор, с бесконечно широкой полосой пропускания, в принципе, должен обнаружить все наши результаты, касающиеся разрывов поля смещений и его производных.

Но что касается практической возможности выполнения упомянутых измерений, а также связанного с этими измерениями вопроса о показаниях высокочастотного прибора в фиксированной точке поля, то здесь дело обстоит уже не столь удовлетворительным образом, так как сейсмограммы оказываются загроможденными записями, не имеющими ничего общего с истинными значениями компонент поля упругих смещений.

Прежде чем обратиться к выяснению существа высказанных утверждений, покажем, что наши представления компонент вектора упругих смещений в виде двукратных интегралов позволяют предвычислять показания высокочастотного прибора.

Мы видели во введении, что определение показаний прибора требует представления исследуемой компоненты поля смещений тригонометрическим интегралом относительно времени  $t$ . Для нахождения последнего представления воспользуемся второй формулой (2,3) [представляющей  $w(\rho, z, t)$  суммой трех слагаемых], в которой  $w_0$  имеет статическое значение (3,3) (при  $n = \infty$ ),  $w_R$  определяется формулой (4,3) (где  $n = \infty$ ), а  $w_\lambda$  представляется равенством

$$w_\lambda = -\frac{1}{2\pi\mu} \int_0^{k_0} [W^{(1)} + W^{(2)}] J_0(k\rho) dk + \tilde{w}_\lambda(\rho, z, t), \quad (29,7)$$

где  $W^{(1)}$  и  $W^{(2)}$  определяются по (3,7), а  $\tilde{w}_\lambda(\rho, z, t)$  имеет значение из (5,7).

Если обозначить  $k_0 = \frac{b}{\beta} \nu_0$ , то легко видеть, что вместо суммы  $\omega_0 + \omega_R$  наш частотный прибор будет регистрировать лишь следующее возмущение:

$$\frac{\sqrt{1-\gamma^2\beta^2}}{\pi\mu} \int_{k_0}^{\infty} \left[ \frac{(2-\beta^2) e^{-kz\sqrt{1-\gamma^2\beta^2}} - 2e^{-kz\sqrt{1-\beta^2}}}{4\beta^2 c_0} \right] \times \\ \times J_0(k\rho) \cos \frac{k\beta}{b} t dk. \quad (30,7)$$

Для определения показаний прибора, вызванных первым слагаемым из (29,7), следует заметить, что упомянутое слагаемое может быть представлено второй формулой (14,3), в которой положено  $n = \infty$  и интегрирование по  $k$  совершается в промежутке  $(0, k_0)$ . Если число  $\nu_0$  достаточно велико ( $\nu_0 > \frac{k_0}{a}$ ), то из (14,3) видно, что множители  $\sin \nu t$  и  $\cos \nu t$  при  $\nu > \nu_0$  будут содержаться лишь в третьем и пятом интегралах из (14,3). Из-за громоздкости этих интегралов не будем их всех рассматривать, а ограничимся лишь тем, что рассмотрим первое слагаемое третьего интеграла из (14,2), равное

$$\frac{1}{2\pi^2\mu} \int_0^{k_0} J_0(k\rho) dk \int_{\frac{1}{\gamma}}^{\infty} \Phi(\lambda) \cos k \left( \frac{t}{b} \lambda - z\sqrt{\lambda^2 - 1} \right) d\lambda, \quad (31,7)$$

где  $\Phi(\lambda)$  определяется сравнением с (14,3).

Пользуясь формулой для косинуса разности, вводя новую переменную интегрирования по формуле  $\nu = k\lambda b^{-1}$  и переставляя порядок интегрирования по  $k$  и по  $\nu$ , убеждаемся в том, что частотный прибор обнаружит вместо (31,7) следующее возмущение:

$$\frac{1}{2\pi^2\mu} \int_{\nu_0}^{\infty} d\nu \int_0^{k_0} \Phi \left( \frac{\nu b}{k} \right) \frac{b}{k} J_0(k\rho) [\cos z \sqrt{b^2\nu^2 - k^2} \cos \nu t + \\ + \sin z \sqrt{b^2\nu^2 - k^2} \sin \nu t] dk.$$

Аналогичные результаты получаются и для остальных слагаемых из (14,3).

Нам остается еще определить показания высокочастотного прибора при наблюдении возмущения  $\tilde{\omega}_\lambda$ , являющегося

последним слагаемым в (29,7). Не представляло бы труда убедиться в том, что эти показания, практически, совпадают с результатами, полученными в п. 3 настоящего параграфа.

Теперь сделаем короткое замечание, касающееся недостатков практической работы с частотными приборами. При этом, для большей наглядности и простоты рассуждений, будем считать, что исследуется не все поле упругих смещений  $w(\rho, z, t)$ , а лишь его релеевская часть  $w_R(\rho, z, t)$ , подробно рассмотренная в п. 3 § 3 и представляющаяся плавным графиком, изображенным на рис. 2.

Как уже говорилось, если поле  $w_R$  исследуется частотным прибором, настроенным на промежуток  $\nu_0 \leq \nu < \infty$ , то прибор будет регистрировать вместо  $w_R$  возмущение (30,7)

при  $k_0 = \frac{b}{\delta} \nu_0$ . Последнее же, как легко проверить, совсем не представляется плавным графиком, а оказывается связанным с сильными колебательными изменениями.

Приведенный пример показывает, что высокочастотный прибор обнаруживает „колебания“ даже там, где их нет в действительности. Это обстоятельство является существенным недостатком высокочастотных приборов, так как оно приводит к чрезвычайному загромождению сейсмограмм „колебаниями“ (порожденными самим прибором), не вызванными процессами, протекающими в исследуемой системе. Наличие таких „колебаний“ на сейсмограммах затрудняет точное определение положений фронтов волн, не говоря уже об определении характера разрывов поля смещений на этих фронтах.

### § 8. Задача об изменении интенсивностей падающих волн при отражении от границы упругого полупространства

1. Рассмотрим источник колебаний, расположенный в точке  $\rho=0$ ;  $z=h > 0$  упругого полупространства  $z \geq 0$  такой, что его действие в области  $z < h$  безграничной среды характеризовалось бы потенциалами:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{1}{4\pi\mu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_1(\zeta, k) e^{k\frac{t}{b} \zeta + k(z-h) \sqrt{1+\zeta^2}} d\zeta \right\} J_0(k\rho) dk, \\ \psi_0 &= \frac{1}{4\pi\nu b} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F_2(\zeta, k) e^{k\frac{t}{b} \zeta + k(z-h) \sqrt{1+\zeta^2}} d\zeta \right\} J_1(k\rho) dk, \end{aligned} \right\} (1,8)$$

в которых  $\sigma > 0$ , а  $F_\nu(\zeta, k)$  являются некоторыми функциями, регулярными в правой полуплоскости переменной  $\zeta$  и имеющими, быть может, точки разветвления при  $\zeta = \pm i$  и  $\zeta = \pm \frac{i}{\gamma}$ . Для большей общности в постановке задачи целесообразно не делать частных предположений о виде функций  $F_\nu(\zeta, k)$ . Важно лишь предполагать, что при  $\zeta \rightarrow \sigma \pm i \infty$  эти функции убывают не медленнее, чем  $|\zeta|^{-2}$ , и что кроме точек разветвления  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$  они могут иметь полюсы в точке  $\zeta = 0$ , а также в корнях  $\zeta = \pm i\delta$  уравнения Релея.

Возмущение, созданное источником (1,8), доходит до границы  $z = 0$  упругого полупространства и отражается. В результате отражения из волны, определяемой потенциалом  $\varphi_0$ , образуются две волны, характеризующиеся потенциалами  $\varphi_{11}$  и  $\psi_{12}$ , а из волны, определяемой потенциалом  $\psi_0$ , образуются две другие волны, потенциалы которых мы обозначим через  $\varphi_{21}$  и  $\psi_{22}$ . На основании исследований § 2 можно утверждать, что потенциалы отраженных волн определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ik} &= \frac{-1}{4\pi\mu b} \int_0^\infty X_{ik}(z, t, k) J_0(k\rho) dk, \\ \psi_{ik} &= \frac{-1}{4\pi\mu b} \int_0^\infty Y_{ik}(z, t, k) J_1(k\rho) dk, \end{aligned} \right\} (2,8)$$

в которых функции  $X_{ik}(z, t, k)$  и  $Y_{ik}(z, t, k)$  имеют значения

$$\left. \begin{aligned} X_{11} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{T(\zeta)}{R(\zeta)} F_1(\zeta, k) e^{k \frac{t}{b} \zeta - k(z+h) \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}} d\zeta; \\ Y_{12} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{4\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} (2+\zeta^2)}{R(\zeta)} \times \\ &\times F_1(\zeta, k) e^{k \frac{t}{b} \zeta - kz \sqrt{1+\zeta^2} - kh \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}} d\zeta; \end{aligned} \right\} (3,8)$$

<sup>1</sup> Заметим, что из сравнения с (16,2) и (23,2) вытекает, что в случае единичной включенной в точке  $\rho = 0$ ;  $z = h$  силы следует полагать

$$F_1 = \frac{b}{k\zeta^3}; \quad F_2 = \frac{-b}{k\zeta^3 \sqrt{1+\zeta^2}}.$$

В случае же какого-то центра расширения следует считать, что  $F_2 = 0$ .

$$\left. \begin{aligned}
 X_{21} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{4\sqrt{1+\zeta^2} (2+\zeta^2)}{R(\zeta)} \times \\
 &\times F_2(\zeta, k) e^{k\frac{t}{b}\zeta - kz\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} - kh\sqrt{1+\zeta^2}} d\zeta, \\
 Y_{22} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{T(\zeta)}{R(\zeta)} F_2(\zeta, k) e^{k\frac{t}{b}\zeta - k(z+h)\sqrt{1+\zeta^2}} d\zeta,
 \end{aligned} \right\} (4,8)$$

где ради краткости обозначено<sup>1</sup>

$$\left. \begin{aligned}
 T(\zeta) &= (2+\zeta^2)^2 + 4\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}; \\
 R(\zeta) &= (2+\zeta^2)^2 - 4\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}.
 \end{aligned} \right\} (5,8)$$

2. Для некоторых прикладных вопросов, в частности, для решения задачи о распространении упругих волн в произвольных плоско-параллельных слоистых средах, важно произвести исследование „интенсивностей“ волн, отражаемых границей упругого полупространства. При этом под „интенсивностью“ волны (в различных случаях) могут подразумеваться различные выражения, вид которых, в основном, определяется конструкцией прибора, при помощи которого наблюдаются упругие возмущения. Для нас является существенным то обстоятельство, что понятие „интенсивность“ всегда связывается с характеристическими поверхностями поля упругих смещений. Иногда „интенсивность“ может просто определять величину конечного разрыва на фронте волны. В некоторых же случаях „интенсивность“ может оказаться связанной с разрывами в производных поля упругих смещений и т. п.

При решении задач об изменении интенсивностей волн при отражении их от границы упругого полупространства естественно придерживаться следующих схем, определяющих наш подход к проблеме.

<sup>1</sup> Из сравнения (3,8) и (4,8) с (1,8) видно, что выражения

$$\frac{T(\zeta)}{R(\zeta)}, \quad \frac{4\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} (2+\zeta^2)}{R(\zeta)}, \quad \frac{4\sqrt{1+\zeta^2} (2+\zeta^2)}{R(\zeta)}$$

в какой-то мере играют роль „коэффициентов отражений“ волн в нашей задаче.

Рассмотрим сперва случай отражения продольной волны.

Пусть из точки  $h$ , расположенной на оси  $OZ$  упругого полупространства  $z \geq 0$ , распространяется продольная волна. Эта волна доходит до границы полупространства и отражается, причем при ее отражении образуются две новые волны: волна продольная, с фронтом  $CAD$  (рис. 17) и волна поперечная, фронт которой совпадает с кривой  $CBD$ . (Заметим, что на рис. 17, равно как и на всех последующих рисунках, изображается сечение полупространства плоскостью, проходящей через ось симметрии задачи).

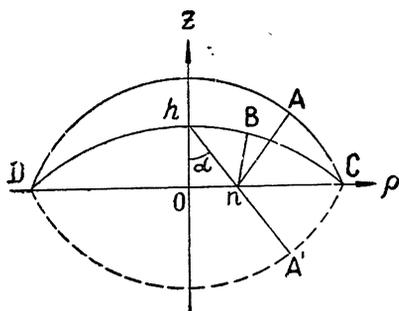


Рис. 17

тис, что на рис. 17, равно как и на всех последующих рисунках, изображается сечение полупространства плоскостью, проходящей через ось симметрии задачи).

Рассмотрим некоторый луч  $hn$  падающей волны, характеризующийся углом падения  $\alpha$ . Построим на рис. 17 соответствующие лучи  $nA$  и  $nB$  отраженных волн, а также построим мысленное продолжение  $nA'$  луча  $hn$  до точки  $A'$ , симметричной

точке  $A$  по отношению к плоскости  $z=0$ .

Произведем, наконец, вычисления интенсивностей  $I_a$  и  $I_b$  полей смещений отраженных волн, соответственно, в точках  $A$  и  $B$ , а также вычислим интенсивность  $I_0$  поля смещений, созданного источником в точке  $A'$  безграничного упругого пространства.

Условимся характеризовать изменение интенсивности продольной волны при ее отражении отношением  $I_a : I_0$ , которое, в конечном счете, окажется лишь функцией угла падения  $\alpha$ .

Совершенно так же условимся интенсивность возникающей при отражении поперечной волны характеризовать величиной  $I_b : I_0$ .

В такой постановке задача имеет определенный физический смысл и легко может быть решена методами, изложенными в §7.

Обратимся теперь к случаю отражения поперечной волны.

Пусть из точки  $h$ , расположенной на оси  $OZ$  упругого полупространства, распространяется поперечная волна. Эта волна, доходя до границы полупространства, отражается, причем при ее отражении образуются поперечные и продольные волны.

Если взять за начало отсчета времени момент посылки источником переднего фронта волны, и если обозначить  $t_0 = hb(1 - \gamma^2)^{-\frac{1}{2}}$ , то без труда можно убедиться в том, что процесс отражения протекает различным образом в зависимости от выполнения неравенств  $t < t_0$  и  $t > t_0$ .

Рассмотрим сперва случай моментов времени  $t < t_0$ . Тогда легко можно убедиться в том, что все углы падения  $\beta$  поперечной волны оказываются меньшими угла  $\beta_0$  полного внутреннего отражения, вследствие чего при отражении образуются лишь два фронта волн: фронт  $CBD$  поперечной волны и фронт  $CAD$  волны продольной (рис. 18). Для решения задачи об интенсивностях нам остается: построить лучи  $hn$ ,  $nB$  и  $nA$  падающей и отраженных волн; построить точку  $B'$ , симметричную точке  $B$  относительно плоскости  $z=0$ ; вычислить интенсивности  $I_a$ ,  $I_b$  и  $I_0$  волн, подобно тому, как это указывалось выше.

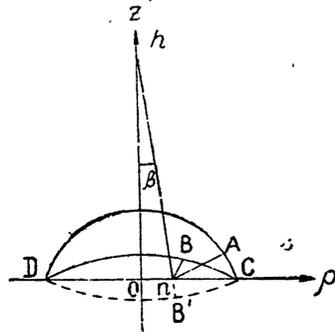


Рис. 18

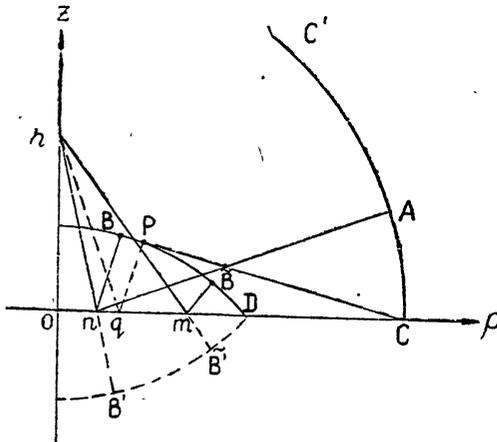


Рис. 19

Пусть теперь  $t > t_0$ , что чаще будет встречаться на практике. В этом случае картина фронтов отраженных волн изображена на рис. 19.

На этом рисунке  $DBB$  изображает фронт поперечной отраженной волны. Кривая  $SAC'$  изображает фронт отраженной продольной волны. Прямая же  $CP$  определяет фронт волны Минтропа, возникшей

при отражении продольной волны  $SAC'$  от границы полупространства.

При этом угол падения луча  $hq$  поперечной волны, приходящей при отражении в точку  $P$  (точку касания  $CP$  с окружностью  $DPB$ ), равен предельному углу  $\beta_0$  полного внутреннего отражения.

Рассмотрим лучи  $hn$ , углы падения  $\beta$  которых меньше угла  $\beta_0$ .

Построив отраженные лучи  $nB$  и  $nA$  поперечной и продольной волн, а также построив продолжение  $nB'$  луча до точки  $B'$ , симметричной точке  $B$ , находим положения точек, для которых следует определять интенсивности  $I_b$ ,  $I_a$ ,  $I_0$  так, как это делалось ранее.

Если же угол падения  $\beta$  луча  $hn$  превосходит  $\beta_0$ , то поперечная волна отражается без образования волны продольной. Для характеристики изменения интенсивности поперечной волны при отражении нужно будет построить отраженный луч  $m\tilde{B}$  и вычислить интенсивности поперечной волны в точках  $\tilde{B}$  и  $\tilde{B}'$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lamb. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. Phil. Trans. Roy. Soc. of London, v. 203, 1904.
- [2] Lamb. Proc. Roy. Soc. London, v. 93, 1917.
- [3] В. И. Смирнов и С. Л. Соболев. О применении нового метода к изучению упругих колебаний. Труды Сейсмолог. инст. АН СССР, № 20, 1932.
- [4] И. Н. Векуа. К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. Труды Геофиз. инст. Груз. филиала АН СССР, т. II, 1937.
- [5] Н. В. Зволинский. Распространение возмущений от точечного импульса в упругом полупространстве, покрытом слоем жидкости. ДАН СССР, т. LIX, № 6, 1948; т. LXV, № 2, 1949.
- [6] В. И. Смирнов и С. Л. Соболев. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии. Труды Сейсмолог. инст. АН СССР, № 29, 1933.
- [7] В. И. Смирнов. О сингулярных решениях волнового уравнения и уравнений упругости. Труды Сейсмолог. инст. АН СССР, № 78, 1936.
- [8] Е. А. Нарышкина. О волнах Релея в пространстве трех измерений. Труды Сейсмолог. инст. АН СССР, № 48, 1934.
- [9] Г. И. Петрашень, Г. И. Марчук, К. И. Огурцов. О задаче Лемба в случае полупространства. Уч. зап. ЛГУ, вып. 21, 1950.
- [10] Г. И. Петрашень. О задаче Лемба в случае упругого полупространства. ДАН СССР, т. LXIV, № 5, 1949.
- [11] Г. И. Петрашень. Двухмерная задача Лемба для бесконечного упругого слоя, ограниченного параллельными плоскостями. ДАН СССР, т. XIV, № 6, 1949.
- [12] Г. И. Петрашень. Колебания упругого полупространства, покрытого слоем жидкости. Наст. сборник, стр. 118.

- [13] Г. И. Петрашень. Решения векторных предельных задач математической физики в случае шара. ДАН СССР, т. XVI, № 7, 1945.
  - [14] Г. И. Петрашень. Колебания изотропного упругого шара. ДАН СССР, т. XVII, № 3, 1945.
  - [15] Ляв. Математическая теория упругости. Пер. с английск. 1935.
  - [16] И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 1948.
-

КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА,  
ПОКРЫТОГО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ*Г. И. Петрашень,*

Задача о полупространстве, покрытом слоем жидкости, рассматривалась по методу комплексных решений Н. В. Зволинским в трех заметках<sup>[1, 2, 3]</sup>, а также в докторской диссертации. В предлагаемой статье дается решение (и производится исследование решения) той же задачи методом неполного разделения переменных, область применимости которого более широка, а аппарат которого нам кажется более соответствующим существу дела. Из сопоставления решений задачи двумя методами можно установить преимущества их друг перед другом.

Еще до решения задачи полезно отметить, что, по нашему мнению, в работах Н. В. Зволинского сделаны не вполне удачные предположения о характере начального возмущения, порождающего колебания среды. Включаемый при  $t=0$  источник создает поле, потенциалы которого имеют на характеристиках бесконечные разрывы. Это заставляет Н. В. Зволинского производить исследование не поля смещения, а поля потенциалов, и заставляет отбрасывать в последних полях некоторые слагаемые, которые в поле смещений должны были бы сократиться. Не представляло бы труда изменить упомянутые предположения исследований Н. В. Зволинского. Но мы не будем сначала этого делать, чтобы не затруднять процесс сравнения методов, которыми пользуется упоминавшийся автор, и методов, излагаемых в нижеследующем. Наше решение поступать таким образом тем более оправдано, что исследование поля потенциалов Н. В. Зволинского почти буквально могло бы быть распространено и на исследование поля смещений, порожденного менее интенсивным (но ближе соответствующим действительности) начальным возмущением (см. Дополнения § 3, п. 16).

§ 1. О построении точного решения задачи <sup>1</sup>

1. Присоединяясь к обозначениям Н. В. Зволинского<sup>[2]</sup>, получим для определения упругих потенциалов  $\varphi_2(x, y, t)$ ,  $\psi_2(x, y, t)$  и потенциала скоростей в жидкости  $\varphi_1(x, y, t)$  те же волновые уравнения и те же граничные условия (с исправленной опечаткой в предпоследнем из них), что и на первой странице упомянутой заметки<sup>[2]</sup>. Будем считать, что при  $t < 0$  в системе царил покой, а при  $t = 0$  начинает действовать точечный центр сжатия, порождающий возмущение, характеризуемое потенциалами:

$$\begin{aligned} \varphi_1^0 = \psi_2^0 = 0, \quad \varphi_2^0 = \varphi_0(x, y, t) = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при } a_2^2 t^2 < x^2 + (y - y_0)^2, \\ \frac{1}{\sqrt{a_2^2 t^2 - x^2 - (y - y_0)^2}} & \text{при } a_2^2 t^2 > x^2 + (y - y_0)^2. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Подобно Н. В. Зволинскому, будем понимать под решением задачи, соответствующей источнику (1), производные по времени от правильных решений волнового уравнения. Можно, например, под решением понимать третьи производные по времени от решения задачи при начальном воздействии следующего типа:

$$\varphi_1^0 = \psi_2^0 = 0; \quad \varphi_2^0 = \Phi_0(x, y, t), \quad (2)$$

при условии, что  $\frac{d^3 \Phi_0}{dt^3} = \varphi_0(x, y, t)$  из (1). Такой подход к поставленной задаче обеспечивает крайнюю простоту обоснования ее решения.

В качестве же  $\Phi_0(x, y, t)$  из (2) можно взять функцию, представимую следующим интегралом Фурье:

$$\Phi_0 = \int_0^\infty R_0(y, t, k) \cos kx \, dk, \quad (3)$$

<sup>1</sup> Заметим, что более подробно материал настоящего параграфа изложен в другой нашей работе.

где

$$R_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\pm \frac{y-y_0}{a_2} \sqrt{a_2^2 k^2 + s^2}}}{a_2 s^3 \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a_2^2}}} e^{st} ds,$$

причем знак плюс отвечает значениям  $y < y_0$ , знак минус берется при  $y > y_0$ , а ветвь радикала фиксирована условием, что  $\arg \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a_2^2}} = 0$ , при  $s > 0$ .

2. Если потенциалы полей представлять в виде

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1; \quad \tilde{\varphi}_2 = \Phi_0 + \varphi_2; \quad \tilde{\psi}_2 = \psi_2, \quad (4)$$

то для определения функций  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\psi_2$  получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} &= \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} &= \frac{1}{b_2^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

начальные данные

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = 0 \quad (\text{при } t=0) \quad (6)$$

и следующие граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \Big|_{y=-H} = 0, \quad \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial t} \right]_{y=0} &= \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y \partial t} \Big|_{y=0}, \\ \left[ \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - (a_2^2 - 2b_2^2) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2b_2^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} \right]_{y=0} &= \left[ (a_2^2 - 2b_2^2) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} \right]_{y=0}; \\ \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \right]_{y=0} &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Будем искать решение задачи в виде интегралов Фурье

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(x, y, t) &= \int_0^{\infty} R_1(y, t, k) \cos kx \, dk, \\ \psi_2(x, y, t) &= \int_0^{\infty} S_2(y, t, k) \sin kx \, dk. \end{aligned} \right\} (8)$$

Предполагая возможность двукратного дифференцирования под знаками интегралов (что потом должно проверяться), нетрудно свести задачу (5), (6) и (7) к более простой граничной задаче для функций  $R_1(y, t, k)$  и  $S_2(y, t, k)$ . Решение последней естественно искать при помощи одностороннего преобразования Лапласа, которое приводит нашу задачу к элементарной алгебраической системе уравнений. Решая упомянутую систему и полагая  $p = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ ,  $\delta = \frac{b_2}{a_1}$ ,  $\gamma = \frac{b_2}{a_2}$ ; вводя вместо переменной  $s$  из (3) новую переменную интегрирования по формуле  $s = kb_2\zeta$  и, наконец, определяя ниже следующие радикалы условиями, что  $\arg \sqrt{1 + \zeta^2} = \arg \sqrt{1 + \gamma^2\zeta^2} = \arg \sqrt{1 + \delta^2\zeta^2} = 0$ , при  $\zeta > 0$ , мы получим для функций  $R_1(y, t, k)$  и  $S_2(y, t, k)$  следующие окончательные представления:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2(2+\zeta^2) \operatorname{sh} \left[ \left(1 + \frac{y}{H}\right) \alpha \right]}{a_2 b_2 k^2 \Delta_0(k, \zeta)} \times \\ &\quad \times e^{kb_2 t \zeta - ky_0 \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} d\zeta, \\ R_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\left[ p \zeta \operatorname{sh} \alpha - \sqrt{\frac{1+\delta^2\zeta^2}{1+\gamma^2\zeta^2}} \frac{R}{\zeta^3} \operatorname{ch} \alpha \right]}{a_2 b_2^2 k^3 \Delta_0(k, \zeta)} \times \\ &\quad \times e^{kb_2 t \zeta - k(y+y_0) \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} d\zeta, \\ S_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{4 \sqrt{1+\delta^2\zeta^2} (2+\zeta^2) \operatorname{ch} \alpha}{a_2 b_2^2 k^3 \zeta^3 \Delta_0(k, \zeta)} \times \\ &\quad \times e^{kb_2 t \zeta - yk \sqrt{1+\zeta^2} - y_0 k \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} d\zeta, \end{aligned} \right\} (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0(k, \zeta) &= p \zeta^4 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \operatorname{sh} \alpha + \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} \bar{R}^+ \operatorname{ch} \alpha, \\ \bar{R}^+ &= (2 + \zeta^2)^2 - 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}, \\ \bar{R} &= (2 + \zeta^2)^2 + 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}, \\ \alpha &= Hk \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2}. \end{aligned} \right\} (10)$$

Не представляет труда проверить, что (8) и (9) действительно дают правильное решение задачи (5), (6) и (7).

3. Для того чтобы перейти от построенных решений со слабыми разрывами на характеристиках к „решениям“ задачи, соответствующей начальному импульсу (1), нужно вычислить третьи производные по времени от функций (8) и (9). Не представляет труда убедиться в том, что вычисление производных  $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}$ ,  $\frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial t^3}$  и  $\frac{\partial^3 \psi_2}{\partial t^3}$  может быть выполнено дифференцированием под знаками интегралов. В результате вычисления указанных производных получаются формулы, удобные для применения простого тождественного преобразования, приводящего наши решения к форме Н. В. Зволинского. После же выполнения упомянутого преобразования легко производится и последнее дифференцирование функции  $\varphi_1$ .

Для иллюстрации сказанного мы рассмотрим функцию

$$\varphi = \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial t^3} = \int_0^{\infty} \frac{\partial^3 R_2(y, t, k)}{\partial t^3} \cos kx dk, \quad (11)$$

произведем для нее упомянутое тождественное преобразование и покажем, что эта функция естественным образом приводится к виду решения  $\varphi_2$  Н. В. Зволинского. Остальные решения  $\varphi_1$  и  $\psi_2$  упомянутого автора могли бы быть получены совершенно аналогичным образом.

4. Следуя Н. В. Зволинскому, введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{b_2 \zeta} \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2}; \quad x_2 = \frac{1}{b_2 \zeta} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}; \\ \lambda_2 &= \frac{1}{b_2 \zeta} \sqrt{1 + \zeta^2}; \quad h = -2x_1 H, \\ R &= \frac{1}{\zeta^4} \left[ (2 + \zeta^2)^2 + 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \right] = \frac{1}{\zeta^4} \bar{R}; \\ R^+ &= \frac{1}{\zeta^4} \bar{R}^+; \\ r &= \frac{\rho_1 x_2}{\rho_2 x_1} = p \sqrt{\frac{1 + \gamma^2 \zeta^2}{1 + \delta^2 \zeta^2}}; \quad m = \frac{R^+ - r}{R^+ + r}. \end{aligned} \right\} (12)$$

Нетрудно убедиться, что если  $\text{Re } \zeta = \sigma > 0$  достаточно велико, то для любого  $k > 0$  справедливо следующее равномерно сходящееся разложение:

$$\frac{1}{\Delta_0(k, \zeta)} = \frac{2 \sum_{q=0}^{\infty} (-m)^q e^{-(2q+1)Hk\sqrt{1+\delta^2\zeta^2}}}{\zeta^4 \sqrt{1+\delta^2\zeta^2} (R^+ + r)} \quad (13)$$

Если воспользоваться предыдущим разложением, а также формулой

$$\begin{aligned} p \zeta \text{sh } \alpha - \sqrt{\frac{1+\delta^2\zeta^2}{1+\gamma^2\zeta^2}} \cdot \frac{\bar{R}}{\zeta^3} \text{ch } \alpha = \\ = \frac{-p \zeta}{2r} \left\{ (R-r)e^\alpha + (R+r)e^{-\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

то третью производную от  $R_2$  без труда можно представить следующим равенством:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 R_2}{\partial t^3} = & \frac{-p}{2\pi i a_2} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R-r}{r \alpha_1 \zeta (R^+ + r)} e^{k b_2 t \zeta - k(y+y_0) \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} d\zeta - \\ & - \frac{4p}{a_2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(2+\zeta^2)^2 (-m)^{q-1}}{\alpha_1 \zeta^5 (R^+ + r)^2} \times \\ & \times e^{k [b_2 t \zeta - 2qH \sqrt{1+\delta^2\zeta^2} - (y+y_0) \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}]} d\zeta, \quad (14) \end{aligned}$$

второе слагаемое в котором фактически сводится к сумме конечного числа интегралов (у которых  $b_2 t - 2qH \delta - (y+y_0)\gamma \geq 0$ ), соответствующих повторным отраженным волнам, распространяющимся в слое жидкости.

Если подставить (14) в (11) и воспользоваться вещественностью функции  $R_2$  из (9), то функция  $\varphi$  представится конечной суммой вещественных частей интегралов следующего вида:

$$\begin{aligned} I_0 = & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R-r}{r \alpha_1 \zeta (R^+ + r)} e^{k [b_2 t \zeta - (y+y_0) \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} + ix]} d\zeta, \\ I_q = & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{(2+\zeta^2)^2 (-m)^{q-1}}{\alpha_1 \zeta^5 (R^+ + r)^2} \times \\ & \times e^{k [b_2 t \zeta - 2qH \sqrt{1+\delta^2\zeta^2} - (y+y_0) \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} + ix]} d\zeta, \end{aligned}$$

контур комплексного интегрирования в которых можно деформировать.

Нетрудно убедиться в том, что если путь интегрирования  $\text{Re } \zeta = \sigma > 0$  заменить подходяще выбранными контурами  $(l_q)$  [совпадающими со стационарными контурами функций  $b_2 t \zeta - 2qH\sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} - (y + y_0)\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}$  в окрестности их седловых точек], то можно доказать законность изменения порядка интегрирования по  $k$  и  $\zeta$ <sup>[4]</sup>. Переставляя же порядок интегрирования, выполняя интегрирование по  $k$  и вводя новую переменную интегрирования по формуле  $\theta = \frac{i}{b_2 \zeta}$ , получим для интегралов  $I_0$  и  $I_q$  выражения

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{(L)} \frac{(R-r) d\theta}{r x_1 (R^+ + r) [t + \theta x - (y + y_0) x_2]},$$

$$I_q = \frac{1}{2\pi} \int_{(L)} \frac{(1 - 2b_2^2 \theta^2)^2 (-m)^{q-1} d\theta}{x_1 (R^+ + r)^2 [t + \theta x + qh - (y + y_0) x_2]},$$

в качестве пути интегрирования в которых уже можно взять контур  $(L)$ , введенный Н. В. Зволинским<sup>[2]</sup>. Совершая указанные преобразования над всеми интегралами, входящими в выражение функции  $\varphi$  из (11), а также учитывая контурное представление потенциала источника (1) и равенство  $x_2 = \frac{r x_1}{p}$ , мы получаем для суммарного продольного потенциала в полупространстве в точности формулу (3)<sup>2</sup> заметки Н. В. Зволинского<sup>[2]</sup>. В переменной  $\zeta$  эта формула записывается в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \varphi = \text{Re} \left\{ -\frac{\gamma}{2\pi i} \int_{(l_0)} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} [b_2 t \zeta \pm (y - y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix]} + \right. \\ \left. + \frac{p}{2\pi i a_2} \int_{(l'_0)} \frac{(R-r) d\zeta}{x_1 r \zeta (R^+ + r) [b_2 t \zeta - (y + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix]} + \right. \\ \left. + \frac{4p}{2\pi i a_2} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{(l_q)} \frac{(2 + \zeta)^2 (-m)^{q-1} d\zeta}{x_1 \zeta^3 (R^+ + r)^2 [b_2 t \zeta - 2qH\sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} - (y + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix]} \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

в котором бесконечные пути интегрирования  $(l_q)$ , расположенные в правой полуплоскости переменной  $\zeta$ , проведены

так, что справа от каждого из них оказывается лишь по одной особой точке подинтегральной функции, соответствующей корню уравнения

$$b_2 t \zeta - 2qH \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} - (y + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ix = 0$$

с положительной вещественной частью.

Совершенно таким же способом, как и выше, получаются и остальные формулы упоминавшегося автора. Итак, мы убедились, что метод неполного разделения переменных позволяет очень простыми и естественными способами получать формулы, которые Н. В. Зволинский считал удобным взять за исходные для исследования физических процессов в системе „упругое полупространство и жидкий слой“. Предлагаемый способ решения задачи, как нам кажется, проще способа, основанного на методе комплексных решений.

Не представляет труда убедиться и в том, что метод неполного разделения переменных дает значительно больше возможностей для исследования построенного решения задачи, нежели метод комплексных решений. Это есть следствие того обстоятельства, что окончательные формулы (8) и (9) при неполном разделении переменных еще не предreshают формы решения, которую исследователь может взять для получения тех или иных физических следствий. Возможность же естественного и простого перехода к новым представлениям решения часто определяет успех при анализе динамических процессов.

Перейдем теперь к изложению основных этапов асимптотического исследования решения задачи [при воздействии (1)] в случае<sup>1</sup>  $t \gg 1$ . Подобного рода исследование уже производил Н. В. Зволинский<sup>[3]</sup> на основе своих решений. Упомянутое исследование потребовало от автора преодоления больших затруднений и, как нам кажется, оказалось недостаточно полным. Мы же сейчас убедимся в том, что если исходить из представления решения в виде двукратных интегралов, то полная качественная картина явлений в системе может быть получена сравнительно простыми средствами.

<sup>1</sup> При этом, ради большей ясности изложения основной идеи исследования, будем опускать в тексте некоторые доказательства не вполне очевидных утверждений. Эти доказательства приведены частично в § 3 настоящей статьи, частично же они будут следовать из другой нашей работы.

## § 2. Асимптотическое исследование построенных решений

5. Оставляя без внимания потенциал точечного источника, примем в качестве исходных формул для потенциала  $\varphi(x, y, t)$  из (11) следующие интегральные представления

$$\varphi = \int_0^{\infty} R(y, t, k) \cos kx dk; \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} R(y, t, k) &= \frac{\partial^3 R_2}{\partial t^3} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda_0)} \frac{b_2}{a_2} \cdot \frac{\rho \zeta^4 \operatorname{sh} \alpha - \sqrt{\frac{1 + \delta^2 \zeta^2}{1 + \gamma^2 \zeta^2}} \bar{R} \operatorname{ch} \alpha}{\Delta_0(k, \zeta)} e^{k [b_2 t \zeta - (y + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}] d\zeta}, \end{aligned} \right\} (17)$$

получающиеся из формул (8) и (9), в которых контур интегрирования  $(\lambda_0)$  совпадает пока с прямой  $\operatorname{Re} \zeta = c > 0$ .

Одновременно с продольным потенциалом в упругой среде иногда полезно рассматривать и потенциал поперечный, представляющийся следующими формулами:

$$\psi = \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial t^3} = \int_0^{\infty} S(y, t, k) \sin kx dk; \quad (16_1)$$

$$\left. \begin{aligned} S(y, t, k) &= \frac{\partial^3 S_2}{\partial t^3} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda_0)} \frac{4b_2}{a_2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} (2 + \zeta^2) \operatorname{ch} \alpha}{\Delta_0(k, \zeta)} e^{k [b_2 t \zeta - y \sqrt{1 + \zeta^2} - y_0 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}] d\zeta}. \end{aligned} \right\} (17_1)$$

Так, например, будет при исследовании распространения нестационарной волны Релея, свойства которой оказываются различными для полей (16) и (16<sub>1</sub>).

При исследовании функций  $\varphi$  и  $\psi$  мы будем выбирать некоторое число  $k_0 > 0$ , фиксируемое ниже, и будем представлять функции суммами

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \varphi_1, \\ \psi &= \psi_0 + \psi_1, \end{aligned} \right\} (18)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \int_0^{k_0} R(y, t, k) \cos kx \, dk, & \varphi_1 &= \int_{k_0}^{\infty} R(y, t, k) \cos kx \, dk, \\ \psi_0 &= \int_0^{k_0} S(y, t, k) \sin kx \, dk, & \psi_1 &= \int_{k_0}^{\infty} S(y, t, k) \sin kx \, dk. \end{aligned} \right\} (19)$$

Функции  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  оказываются плавно изменяющимися; функции же  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  описывают все резкие неоднородности полей потенциалов. Мы увидим, что если отбросить в выражениях  $\varphi$  и  $\psi$  некоторые слагаемые (которые сократились бы при переходе к полю смещений), то выражения  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  быстро стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , а функции  $\varphi_1$  и  $\psi_1$  определяют нам все основные процессы, происходящие в системе.

Заметим, наконец, что исследование функций  $\varphi$  и  $\psi$  производится тождественными методами. Поэтому мы можем рассматривать лишь одну из них, например  $\varphi(x, y, t)$ , а второй функции  $\psi(x, y, t)$  будем обращаться только в тех случаях, когда результаты исследований для  $\varphi$  и  $\psi$  оказываются различными.

6. Особыми точками подинтегральных функций в (17) и (17<sub>1</sub>) являются точки разветвления  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$ , а также корни характеристического уравнения

$$\Delta_0(k, \zeta) = 0, \quad (20)$$

играющие весьма важную роль в исследовании функций  $\varphi$  и  $\psi$ .

Исследование корней уравнений (20) не представляет принципиальных затруднений;<sup>1</sup> результаты же исследований зависят от того, каким образом проведены на плоскости ( $\zeta$ ) разрезы. Мы будем предполагать, что разрезы проведены так, как указано сплошными линиями на рис. 2 (см. п. 8), и остановимся коротко на некоторых результатах исследования уравнения (20) в предположении, что выполняются следующие неравенства (принятые в работах Н. В. Зволинского):

$$c_2 = b_2 \vartheta < a_1 < b_2 < a_2; \quad \rho_1 < \rho_2, \quad (21)$$

<sup>1</sup> Корни уравнения (20) относительно числа  $k$  (которое считалось комплексным) при фиксированных мнимых значениях  $k\zeta = ip$ , рассматривались Д. И. Шерманом<sup>[5]</sup>. Результаты этих исследований представляют для нашей задачи лишь косвенный интерес.

где  $c_2 = b_2 \vartheta$  — скорость волны Релея на границе полупространства и пустоты. [Заметим, что более подробно о корнях уравнения (20) говорится в § 3, п. 17.]

Уравнение (20) при любом фиксированном значении  $k$  имеет конечное число корней, расположенных на мнимой оси, и бесконечное множество корней, расположенных в левой полуплоскости переменной  $\zeta$ . Остановимся сперва на рассмотрении корней  $\zeta = \pm i\tau$ , лежащих на мнимой оси, причем будем учитывать известный<sup>[6]</sup> результат, заключающийся в том, что уравнение

$$p\tau^4 \sqrt{1-\gamma^2\tau^2} + \sqrt{1-\delta^2\tau^2} \bar{R}^+ = 0, \quad (20_1)$$

в которое обращается уравнение (20) при  $\tau\delta < 1$  и  $k \rightarrow \infty$ , имеет лишь два отличных от нуля корня  $\tau = \pm \tau_0$  и притом таких, что  $\tau_0 < \vartheta$ , где  $\vartheta$  есть корень уравнения Релея

$$(2 - \tau^2)^2 - 4\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-\gamma^2\tau^2} = 0$$

в случае упругого полупространства. (Для среды, у которой  $\lambda_2 = \mu_2$  будет  $\vartheta = 0,919\dots$ ).

Не представляет труда убедиться, что при фиксированном  $k$  уравнение (20) имеет двойной корень при  $\tau = 0$ , простые корни  $\tau = \pm \tau_1^0$ , расположенные в промежутке  $\tau_0 < |\tau_1^0| \leq \vartheta$  и конечное число простых корней  $\tau = \pm \tau_n$ , удовлетворяющих неравенству  $\frac{1}{\delta} = \frac{a_1}{b_2} \leq |\tau_n| \leq 1$ . Других корней на мнимой оси уравнение (20) не имеет.

Для выяснения количественной и качественной картины процессов, происходящих в системе, важно установить приближенное значение  $\tau_1^0$  при весьма больших значениях  $k$ , а также важно исследовать значения  $\frac{d}{dk} [k\tau(k)]$  и  $\frac{d^2}{dk^2} [k\tau(k)]$  для всех корней, расположенных на мнимой оси, при условии, что волновое число  $k$  лежит в промежутке  $0 \leq k \leq k_0$ . Что касается первого вопроса, то он разрешается совершенно элементарно и приводит к формуле

$$\tau_1^0 = \tau_0 + \frac{p_0}{g_0} e^{-2Hk} \sqrt{1-\delta^2\tau_0^2} \left[ 1 + O\left( e^{-2Hk} \sqrt{1-\delta^2\tau_0^2} \right) \right], \quad (22)$$

где  $p_0$  и  $g_0$  являются первыми коэффициентами следующих разложений

$$p\tau^4 \sqrt{1-\gamma^2\tau^2} + \sqrt{1-\delta^2\tau^2} R^+ = g_0(\tau - \tau_0) + g_1(\tau - \tau_0)^2 + \dots,$$

$$p\tau^4 \sqrt{1-\gamma^2\tau^2} - \sqrt{1-\delta^2\tau^2} R^+ = p_0 + p_1(\tau - \tau_0) + \dots$$

Решение же второго вопроса требует более подробных и кропотливых исследований. При этом для нахождения упоминавшихся производных от выражения  $k\tau_1^0(k)$  следует производить дифференцирование, по правилам дифференцирования неявных функций, равенства

$$\text{th } Hk\sqrt{1-\delta^2\tau^2} = -\sqrt{\frac{1-\delta^2\tau^2}{1-\gamma^2\tau^2}} \frac{R^+}{p\tau^4}, \quad (23_1)$$

а для нахождения производных от  $k\tau_n(k)$  нужно уже дифференцировать следующее уравнение:

$$\text{tg } Hk\sqrt{\delta^2\tau^2-1} = -\sqrt{\frac{\delta^2\tau^2-1}{1-\gamma^2\tau^2}} \frac{R^+}{p\tau^4}. \quad (23_2)$$

На вычислении вышеупомянутых производных мы не будем останавливаться.

Переходя к рассмотрению остальных корней уравнения (20), т. е. корней  $\zeta_\nu = -\sigma_\nu \pm i\tau_\nu$ , расположенных в левой полуплоскости переменной  $\zeta$ , будем производить нумерацию этих корней в порядке возрастающих модулей. Тогда для любого большого числа  $R_0$  найдется число  $N$  такое, что при  $\nu \leq N$  будет  $|\zeta_\nu| \leq R_0$ , а при всех  $\nu > N$  уже окажется  $|\zeta_\nu| > R_0$ . Значения корней  $\zeta_\nu$  с номерами  $\nu > N$  определяются без труда и представляются приближенными формулами

$$\zeta_\nu = \frac{-x_0 \pm i\nu\pi}{Hk\delta} [1 + O(|\zeta_\nu|^{-2})], \quad (24)$$

в которых  $x_0$  является корнем следующего трансцендентного уравнения:

$$p\gamma \text{ch } x_0 = \delta \text{sh } x_0.$$

Полезно отметить, что наличие в знаменателе правой части (24) множителя  $k$  позволяет заключить, что при „малых“  $k$  последняя формула определяет уже значения всех корней (имеющих отрицательные вещественные части) уравнения (20), а не только корней с большими номерами  $\nu$ .

Что же касается конечного числа корней  $\zeta$ , с номерами  $\nu < N$  (т. е. корней „малых“ по модулю, если  $k$  не очень мало), то относительно них можно утверждать, что при любом значении  $k$ , заключенном в промежутке  $0 \leq k \leq k_0$ , оказываются справедливыми следующие неравенства:

$$k \operatorname{Re} \zeta_\nu = -k \sigma_\nu \leq -\sigma_0 < 0, \quad (24_1)$$

в которых  $\sigma_0 > 0$  есть некоторое фиксированное число. Если учесть (24) и выбрать число  $\sigma_0$  достаточно малым, то можно считать неравенство (24<sub>1</sub>) распространенным на все корни уравнения (20) рассматриваемого сейчас нами класса.

Приведенных сведений о корнях  $\zeta$ , уравнения (20) окажется вполне достаточно для нижеследующего.

7. Теперь следует перейти ко второму вспомогательному вопросу, разрешение которого необходимо для изучения функций (19). В п. 4 нам уже приходилось пользоваться тождественным преобразованием (13), в котором существенную роль играет функция

$$\begin{aligned} m(\zeta) &= \frac{R^+ - r}{R^+ + r} = \\ &= \frac{(2 + \zeta^2)^2 - 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - p \sqrt{\frac{1 + \gamma^2 \zeta^2}{1 + \delta^2 \zeta^2}}}{(2 + \zeta^2)^2 - 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + p \sqrt{\frac{1 + \gamma^2 \zeta^2}{1 + \delta^2 \zeta^2}}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Нетрудно видеть, что для любого значения  $k > 0$  найдется такое число  $\sigma(k) > 0$ , что для всех  $\zeta$ , у которых  $\operatorname{Re} \zeta > \sigma(k)$ , будет выполняться неравенство

$$\left| m e^{-2Hk \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2}} \right| \leq q_0 < 1, \quad (25_1)$$

обеспечивающее равномерную сходимость правой части (13). Этим обстоятельством мы уже пользовались при получении формулы (14).

Но при исследовании функций (19) приходится переходить в интеграле (17) от пути интегрирования  $\operatorname{Re} \zeta = \sigma > 0$  к контурам  $(\lambda)$ , изображенным на рис. 1 и пересекающим мнимую ось между точками  $\pm \frac{i}{\delta}$ . При этом могут встретиться два случая. Первым будем называть случай, соответствующий предположениям (21). В этом случае выполняется неравенство  $\vartheta < \frac{1}{\delta}$ , позволяющее провести контур  $(\lambda)$  так

[он должен пересекать мнимую ось в промежутках  $(-\frac{i}{\delta}, -i\vartheta)$  и  $(i\vartheta, \frac{i}{\delta})$ ], что во всех его точках будет справедливо соотношение

$$|m(\zeta)| < 1.$$

Поэтому во всех точках упомянутого контура при любых значениях  $k > 0$  будет выполняться неравенство (25). Вторым же будем называть случай, когда оказывается справедливым неравенство  $\frac{1}{\delta} < \vartheta$

[это есть случай, когда скорость  $a_1$  волн в жидкости меньше скорости волны Релея на границе упругого полупространства  $(\lambda_2, \mu_2)$  и пустоты]. Во втором случае на контуре  $(\lambda)$  оказываются точки, в которых

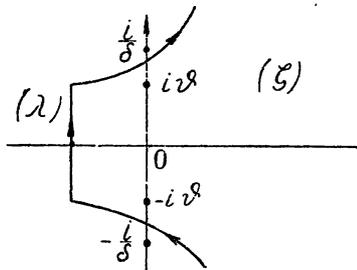


Рис. 1

$$|m(\zeta)| > 1,$$

вследствие чего неравенство (25<sub>1</sub>) уже не будет выполняться при очень малых значениях чисел  $k$ . Но всегда можно выбрать такое число  $k_0 > 0$ , что при  $k \geq k_0$  во всех точках контура  $(\lambda)$  уже будет справедливо (25<sub>1</sub>) и, следовательно, при  $k \geq k_0$  в точках  $(\lambda)$  будет равномерно сходиться разложение (13). Указанное только что число  $k_0$  уже можно взять в качестве числа  $k_0$  в формулах (19).

В соответствии со сделанным Н. В. Зволинским, мы остановились на рассмотрении первого случая, так как решили считать выполняющимися неравенства (21). Поэтому мы могли бы взять в качестве  $k_0$  любое малое положительное число. Но для выполнения асимптотических оценок, к которым мы перейдем в п. 12, выгодно брать число  $k_0$  возможно более большим. При очень же больших  $k_0$  приходится обращаться к исследованию корней уравнения (23<sub>2</sub>), что могло бы загроздить наше исследование. Чтобы избежать последнего, будем считать, что число  $k_0$  в формулах (19) является верхней границей чисел  $k$ , при которых уравнение (23<sub>2</sub>) еще не имеет вещественных корней. Не представляло бы труда убедиться в том, что (если  $\lambda_2 = \mu_2$ ) такое число удовлетворяет неравенству  $Hk_0 > 4$  и что величина

его достаточна для применения упоминавшихся асимптотических методов оценок.

8. Переходя к исследованию потенциала (16), прежде всего отбросим упоминавшееся слагаемое  $\varphi^0$ , которое сократилось бы [с подобным же слагаемым потенциала  $\psi(16_1)$ ], если бы мы рассматривали не потенциал  $\varphi$ , а поле смещений. Для этой цели перейдем в (17) от пути интегрирования  $\operatorname{Re} \zeta = \sigma > 0$  к контуру  $(\lambda_0)$ , оставляющему от себя справа один нуль уравнения (20), а именно точку  $\zeta = 0$ . Вычет подинтегральной функции из (17) в этой точке имеет вид

$$R_0 = f_0(y, k) + f_1(y, k) t. \quad (26)$$

Подстановка же его значения в (16) как раз и дает то слагаемое, которое (как это делает и Н. В. Зволинский) мы решили отбрасывать (см. § 3, п. 16). Итак, будем исследовать функцию (16) при условии, что контур  $(\lambda_0)$  в (17) оставляет справа от себя точку  $\zeta = 0$ . Начнем с исследования функции  $\varphi_0$  из (19).

Если мы учтем формулы (10), то без труда заметим, что подинтегральная функция в (17) имеет точки разветвления при  $\zeta = \pm i$  и  $\zeta = \pm \frac{i}{\gamma}$ . Поэтому на плоскости  $(\zeta)$  мы дол-

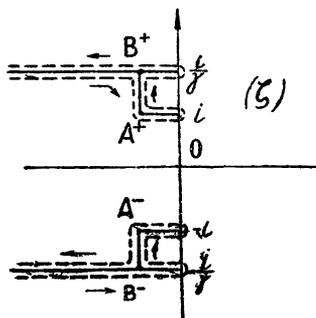


Рис. 2

жны провести разрезы. Их будем проводить так, как изображено на рис. 2 сплошной линией. Разрезы из точек  $\pm i$  идут параллельно вещественной оси до некоторых точек  $A^\pm$ ; затем они идут параллельно мнимой оси до точек  $B^\pm$ , расположенных на разрезах, проведенных от точек  $\pm \frac{i}{\gamma}$  на бесконечность, параллельно отрицательной части вещественной оси. Ветви же радикалов  $\sqrt{1 + \zeta^2}$  и  $\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}$  на основном листе  $(\zeta)$  будем опреде-

лять, как и прежде, условиями, что

$$\arg \sqrt{1 + \zeta^2} = \arg \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} = 0, \text{ при } \zeta > 0.$$

Произведем деформацию контура  $(\lambda_0)$  так, как показано прерывистой линией на рис. 2. При такой деформации сможем представить функцию  $R(y, t, k)$  из (17) в виде суммы вычетов подинтегральной функции во всех (кроме точки

$\zeta = 0$ ) корнях уравнения (20), расположенных на основном листе плоскости ( $\zeta$ ), а также — суммой интегралов типа (17), распространенных по берегам разрезов. Выше мы выбрали число  $k_0$  в (19) настолько малым, чтобы уравнение (20) не имело на мнимой оси других корней, кроме релеевских  $\zeta = \pm i\tau_1^0$ . Поэтому упоминавшаяся сумма вычетов будет состоять из релеевских слагаемых  $R_R(y, t, k)$  (суммы вычетов в точках  $\zeta = \pm i\tau_1^0$ ), а также бесконечного сходящегося ряда вычетов в точках  $\zeta_n$ , удовлетворяющих неравенствам (24<sub>1</sub>). Все слагаемые последней суммы содержат экспоненциально убывающие при возрастании времени множители вида  $\exp[-kb_2\sigma, t]$ , позволяющие без труда убедиться в том, что и результат подстановки в интеграл

$$\varphi_0 = \int_0^{k_0} R(y, t, k) \cos kx dk \quad (19_1)$$

вместо  $R$  всей рассматриваемой суммы будет убывать со временем по экспоненциальному закону (см. § 3, п. 18).

Что же касается результата подстановки в (19<sub>1</sub>) вместо  $R(y, t, k)$  упоминавшихся интегралов по разрезам на плоскости ( $\zeta$ ), то путем элементарных преобразований подинтегральной функции легко удастся доказать, что для любого движущегося наблюдателя ( $x = vt$ ), скорость которого оказывается меньшей скорости  $a_2$  продольных волн в упругой среде, этот результат убывает не медленнее чем  $t^{-1}$ , когда  $t \rightarrow \infty$  (см. § 3, п. 19). Таким образом, оказывается, что при больших значениях времени  $t$  функцию  $\varphi_0(x, y, t)$  из (19) можно представить в следующем виде:

$$\varphi_0 = \int_0^{k_0} R_R(y, t, k) \cos kx dk + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (27)$$

где  $R_R(y, t, k)$  обозначает сумму вычетов подинтегральной функции (17) в релеевских корнях  $\zeta = \pm i\tau_1^0$  уравнения (20).

Исследование первого слагаемого в предыдущей формуле естественно производить одновременно с исследованием подобного же слагаемого в выражении  $\varphi_1(x, y, t)$ . Этим исследованием займемся несколько позднее. Пока же подчеркнем, что сделанное ранее предположение о „малости“ числа  $k_0$  хотя и облегчало исследования, но не имело решающего

значения. Действительно, если бы мы не считали число  $k_0$  „малым“, то нам дополнительно пришлось бы оценивать результаты подстановки в (19<sub>1</sub>) (вместо  $R$ ) вычетов подинтегральных функций (17) в расположенных в промежутке  $\frac{1}{\delta} \leq \tau \leq 1$  корнях уравнения (20). Не представляло бы труда убедиться в том, что такого рода оценки легко могут быть выполнены и что они снова приводят к формулам (27). Вследствие некоторой громоздкости соответствующих выкладок мы не будем на этом вопросе дальше останавливаться.

Перейдем теперь к рассмотрению второго слагаемого в первой формуле (18). Для этой цели перейдем в интеграле (17) от пути интегрирования ( $\lambda_0$ ) к контуру ( $\lambda$ ), изображенному на рис. 1. Тогда получим равенство

$$R(y, t, k) = R_R(y, t, k) + R_\lambda(y, t, k), \quad (28)$$

в котором  $R_R$  представляет сумму вычетов подинтегральной функции (17) в релеевских корнях  $\zeta = \pm i \tau_1^0$  уравнения (20), а  $R_\lambda$  представляет собой интеграл (17), распространенный по контуру ( $\lambda$ ). Если подставить (28) в (19), то задача исследования функции  $\varphi_1(x, y, t)$  сведется к исследованию интегралов

$$\int_{k_0}^{\infty} R_R(y, t, k) \cos kx dk, \quad (29_1)$$

$$\int_{k_0}^{\infty} R_\lambda(y, t, k) \cos kx dk, \quad (29_2)$$

первый из которых естественно объединить с интегралом из формулы (27). Производя указанное объединение и отбрасывая упоминавшееся ранее слагаемое  $\varphi^0$  в выражении потенциала, получим для  $\varphi(x, y, t)$  из (16) следующее представление:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) - \varphi^0 = & \int_0^{\infty} R_R(y, t, k) \cos kx dk + \\ & + \int_{k_0}^{\infty} R_\lambda(y, t, k) \cos kx dk + O\left(\frac{1}{t}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

в котором предполагается, что  $x = vt$ , где  $0 < v < a_2$ .

Совершенно такую же формулу

$$\psi(x, y, t) - \psi^0 = \int_0^{\infty} S_R(y, t, k) \sin kx dk + \\ + \int_{k_0}^{\infty} S_\lambda(y, t, k) \sin kx dk + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad (30_1)$$

мы могли бы получить и для поперечного потенциала  $\phi$  из (16<sub>1</sub>). [В последней формуле  $S_R$  и  $S_\lambda$  имеют смысл, аналогичный смыслу функций  $R_R$  и  $R_\lambda$ ]. Итак, мы видим, что все дальнейшее сводится к исследованию интегралов из (30) и (30<sub>1</sub>), в которых  $k_0 > 0$ , а функции  $R_R$  и  $S_R$  имеют сравнительно простой вид, получающийся на основании теоремы о вычетах.

9. При исследовании первых интегралов из (30) и (30<sub>1</sub>) будем выбирать некоторое большое число  $k_1$  (определяемое далее) и представлять эти интегралы в виде двух следующих слагаемых:

$$\int_0^{k_1} R_R(y, t, k) \cos kx dk + \int_{k_1}^{\infty} R_R(y, t, k) \cos kx dk, \quad (31)$$

$$\int_0^{k_1} S_R(y, t, k) \sin kx dk + \int_{k_1}^{\infty} S_R(y, t, k) \sin kx dk. \quad (31_1)$$

Мы убедимся из дальнейшего, что результаты исследования функций (31) и (31<sub>1</sub>) несколько отличаются друг от друга. Поэтому будет полезно произвести исследование каждой из них. Сейчас это и сделаем, причем начнем с функции (31<sub>1</sub>).

Если выбрать число  $k_1$  настолько большим, что для релеевского корня уже оказывается справедливым представление (22) с малой относительной погрешностью, то второе слагаемое в (31<sub>1</sub>) легко можно оценить количественным образом.

Замечая, что

$$\left. \frac{d \Delta_0(k, \zeta)}{d \zeta} \right|_{\zeta=i\tau_1^0} = \frac{i\tilde{C}_0}{2} e^{Hk} \sqrt{1-\delta^2\tau_0^2} \left[ 1 + O\left( e^{-Hk} \sqrt{1-\delta^2\tau_0^2} \right) \right],$$

где  $\tilde{C}_0$  — постоянная, вычислим значения релеевских вычетов функции из (17<sub>1</sub>). Получим равенство

$$S_R = \frac{8b_2}{a_2} \frac{\sqrt{1 - \delta^2 \tau_0^2} (2 - \tau_0^2)}{\tilde{C}_0} e^{-k [y \sqrt{1 - \tau_0^2} + y_0 \sqrt{1 - \tau_0^2}]} \times \\ \times \sin kb_2 \tau_1^0 t = A e^{-k [y \sqrt{1 - \tau_0^2} + y_0 \sqrt{1 - \tau_0^2}]} \sin kb_2 \tau_1^0 t, \quad (32)$$

в правую часть которого следует подставить

$$\tau_1^0 = \tau_0 + \frac{p_0}{g_0} e^{-2Hk \sqrt{1 - \delta^2 \tau_0^2}}.$$

Обозначим

$$kb_2 \tau_1^0 t = kb_2 \tau_0 t + kb_2 \frac{p_0}{g_0} t e^{-2Hk \sqrt{1 - \delta^2 \tau_0^2}} = \\ = kct + k\Omega t, \quad (33)$$

где  $c$  есть скорость волны Релея на границе упругого полупространства и полупространства жидкости, а  $\Omega$  равно

$$\Omega = b_2 \frac{p_0}{g_0} e^{-2Hk \sqrt{1 - \delta^2 \tau_0^2}}, \quad (33_1)$$

и воспользуемся следующими элементарными формулами

$$\sin(kb_2 \tau_1^0 t) = \sin kct \cos k\Omega t + \cos kct \sin k\Omega t; \\ \sin(kb_2 \tau_1^0 t) \sin kx = \frac{1}{2} [\cos k(x - ct) - \\ - \cos k(x + ct)] \cos k\Omega t + \frac{1}{2} [\sin k(x - ct) + \\ + \sin k(x + ct)] \sin k\Omega t.$$

Тогда мы сможем представить второй интеграл из (31) в виде разности

$$\int_{k_1}^{\infty} S_R(y, t, k) \sin kx dk = \phi_R^{(1)}(ct - x, y) - \phi_R^{(1)}(ct + x, y) \quad (34)$$

следующих выражений

$$\psi_R^{(1)}(\xi, y) = \frac{A}{2} \int_{k_1}^{\infty} e^{-k[y\sqrt{1-\tau_0^2} + y_0\sqrt{1-\tau_0^2}]} [\cos k\xi \cos k\Omega t - \sin k\xi \sin k\Omega t] dk. \quad (35)$$

Будем считать время  $t$  очень большим и будем определять число  $k_1$  условием, что

$$k_1 \Omega t = \frac{\pi}{2N},$$

где  $N \gg 1$  фиксировано. Приближенное значение числа  $k_1$  определится следующим равенством (см. § 3, п. 20):

$$k_1 = \frac{1}{2H\sqrt{1-\delta^2\tau_0^2}} \log \left[ \frac{2Nb_2 p_0}{\pi g_0} t \right]. \quad (35_1)$$

Введем в рассмотрение движущегося наблюдателя  $\xi = \xi_0 + \omega t$ , скорость которого относительно гребня волны Релея равна  $\omega$ .<sup>1</sup> Тогда путем элементарных исследований легко убеждаемся в том, что при фиксированных  $y > 0$ ,  $y_0 > 0$  и  $\omega \neq 0$  функция  $\psi_R^{(1)}(\xi, y)$  убывает (при возрастании времени) не медленнее чем  $t^{-1}$ . В случае же  $\omega = 0$  главная часть  $\psi_R^{(1)}(\xi, y)$  получается из (35), если в последней формуле положить  $\cos k\Omega t = 1$  и  $\sin k\Omega t = 0$ . Учитывая сказанное и производя вычисление элементарного интеграла, получаем следующую формулу:

$$\psi_R^{(1)} = \frac{A}{2} e^{-k_1[y\sqrt{1-\tau_0^2} + y_0\sqrt{1-\tau_0^2}]} \times \left\{ \frac{[y\sqrt{1-\tau_0^2} + y_0\sqrt{1-\tau_0^2}] \cos k_1 \xi_0 - \xi_0 \sin k_1 \xi_0}{[y\sqrt{1-\tau_0^2} + y_0\sqrt{1-\tau_0^2}]^2 + \xi_0^2} + \frac{\pi}{2N} \omega(\xi_0, y) \right\} \quad (36)$$

в которой  $\omega(\xi_0, y)$  представляет собой функцию, по модулю не превосходящую единицы, убывающую с увеличением  $\xi_0$  и  $y$  не медленнее чем  $(\xi_0, y)^{-1}$ . Эту функцию можно было бы вовсе не принимать во внимание.

<sup>1</sup> Гребень волны Релея, как видно из дальнейшего, движется относительно неподвижного наблюдателя по закону  $\xi_0 \equiv ct - x = 0$ .

Из (35<sub>1</sub>) видно, что закон убывания выражения (36) при возрастании времени приближенно определяется величиной

$$\left[ -\frac{\pi g_0}{2N b_2 p_0 t} \right] \frac{y \sqrt{1 - \tau_0^2} + y_0 \sqrt{1 - \gamma^2 \tau_0^2}}{2H \sqrt{1 - \delta^2 \tau_0^2}}, \quad (37)$$

которая уменьшается чрезвычайно медленно при малых значениях  $y$  и  $y_0$ . (При значениях же  $y = y_0 = 0$  она не убывает вовсе.) Также легко видеть, что при малых значениях  $y$  и  $y_0$  правая часть (36) может принимать весьма большие значения в окрестности точки  $\xi_0 = 0$ . Следует подчеркнуть, что вследствие дисперсии скоростей релеевских фазовых волн, распространяющихся вдоль границы полупространства и слоя жидкости, релеевская волна (36) сопровождается колебательными изменениями, определяемыми зависимостью от времени величины  $k_1$ . При этом расстояния между максимумами возмущения (36), равные

$$\Delta \xi_0 = \frac{\pi}{k_1} = 2\pi H \sqrt{1 - \delta^2 \tau_0^2} \cdot \left[ \log \frac{2N b_2 p_0 t}{\pi g_0} \right]^{-1} \quad (37)$$

убывают по логарифмическому закону с возрастанием времени.

Остановимся теперь коротко на исследовании второго интеграла (31). Повторяя предыдущие рассуждения, мы вместо (32) получим

$$R_R = B e^{-k [y + y_0]} \sqrt{1 - \gamma^2 \tau_0^2} \sin k b_2 \tau_1^0 t,$$

где  $B$  есть постоянная. Пользуясь же введенными ранее обозначениями, а также элементарными тождествами, получим вместо (34) формулу

$$\int_{k_1}^{\infty} R_R(y, t, k) \cos kx dk = \varphi_R^{(1)}(ct + x, y) + \varphi_R^{(1)}(ct - x, y), \quad (34_1)$$

в которой

$$\begin{aligned} \varphi_R^{(1)}(\xi, y) = & \frac{B}{2} \int_{k_1}^{\infty} e^{-k(y+y_0)} \sqrt{1-\gamma^2\tau_0^2} [\sin k\xi \cos k\Omega t + \\ & + \cos k\xi \sin k\Omega t] dk = \frac{B}{2} e^{-k_1(y+y_0)} \sqrt{1-\gamma^2\tau_0^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{(y+y_0) \sqrt{1-\gamma^2\tau_0^2} \sin k_1\xi + \xi \cos k_1\xi}{(y+y_0)^2 (1-\gamma^2\tau_0^2) + \xi^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{2N} \omega_1(\xi, y) \right\}, \end{aligned} \quad (36_1)$$

причем  $\omega_1(\xi, y)$  является функцией, подобной функции  $\omega(\xi, y)$  из (36). Из полученной формулы видно, что характер убывания со временем выражения, стоящего в правой части (36<sub>1</sub>), подобен характеру убывания правой части (36). Поведение же правых частей в (36) и (36<sub>1</sub>) при малых значениях  $y, y_0$  и  $\xi$  существенно отличается друг от друга. Полезно подчеркнуть, что упомянутое только что различие в точности соответствует различию в поведении нормальной и тангенциальной (к плоскости раздела сред) составляющих вектора упругих смещений нестационарной волны Релея. Подробнее на этом вопросе не будем здесь останавливаться. Заметим только, что в работах Н. В. Зволинского существование релейевской волны (36) или (36<sub>1</sub>) осталось незамеченным, хотя эта волна при малых значениях  $y+y_0$  и является важнейшей частью возмущения, порожденного источником вида (1).

10. Теперь нам следует перейти к исследованию первых интегралов из (31) и (31<sub>1</sub>). Свойства этих интегралов совершенно тождественны, вследствие чего нам будет достаточно рассмотреть лишь один из них, например первый интеграл из (31). Упомянутый интеграл также будем разбивать на два слагаемых

$$\begin{aligned} & \int_0^{k_2} R_R(y, t, k) \cos kx dk + \\ & + \int_{k_2}^{k_1} R_R(y, t, k) \cos kx dk \end{aligned} \quad (38)$$

при помощи не зависящего от  $t$  фиксированного числа  $k_2 < k_1$ , выбранного настолько большим, что при всех  $k > k_2$  ока-

зывается справедливым представлением (22) с малой относительной погрешностью.

Для качественной оценки первого слагаемого в (38) произведем вычисление суммы релеевских вычетов  $R_R(y, t, k)$  подинтегральной функции в (17) и заметим, что эта сумма представляется произведением

$$R_R = f(y, k) \sin kb_2 \tau_1^0 t$$

медленно изменяющейся (при изменении числа  $k$ ) функции  $f(y, k)$  и быстро изменяющегося множителя  $\sin kb_2 \tau_1^0 t$ . Подставляя значение  $R_R$  в первый интеграл (38) и предполагая, что координата  $x$  наблюдателя изменяется по закону  $x = vt$ , мы убеждаемся в том, что первый интеграл из (38) убывает со временем так же, как убывают при возрастании  $t$  следующие интегралы:

$$\int_0^{k_2} f(y, k) \begin{cases} \sin t(kv \pm kb_2 \tau_1^0) \\ \cos t(kv \pm kb_2 \tau_1^0) \end{cases} dk,$$

последние же, как известно, убывают не медленнее чем  $t^{-1}$ , если в промежутке  $0 \leq k \leq k_2$  производная функции  $\varphi_1(k) = kv \pm kb_2 \tau_1^0$

не обращается в нуль. Так, например, будет для всех интегралов в том случае, если скорость  $v$  наблюдателя удовлетворяет неравенствам:  $v > c_2$  или  $v < c_0$ , где  $c_2$  есть скорость волны Релея на границе упругого полупространства и пустоты, а  $c_0 \geq 0$  является некоторой величиной, мень-

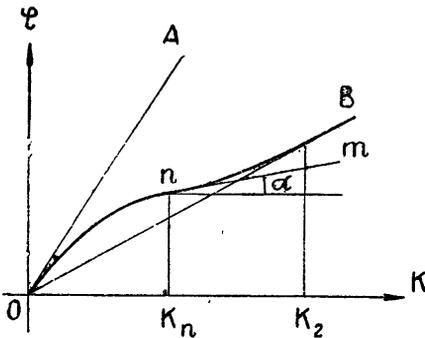


Рис. 3

шей скорости  $c$  релеевской волны на границе упругого полупространства и полупространства жидкости. Наличие постоянной  $c_0$  будет пояснено приводимым графиком (рис. 3).

Если же в промежутке  $0 \leq k \leq k_2$  функция  $\varphi_1'(k)$  обращается в нуль в некоторых точках, в которых  $\varphi_1''(k) \neq 0$ , то предыдущие интегралы уже убывают со временем как  $t^{-\frac{1}{2}}$ . Так будет обстоять дело для некоторых интегралов-

в тех случаях, когда скорость  $v$  наблюдателя удовлетворяет неравенству  $c_0 < v < c_2$ . Наконец, если для некоторой скорости  $v = v_0$  наблюдателя в какой-то точке промежутка  $(0, k_2)$  оказывается  $\varphi'_1(k) = \varphi''_1(k) = 0$ , но  $\varphi'''_1(k) \neq 0$ , то закон убывания со временем предыдущих интегралов понижается и оказывается сравнимым с  $t^{-\frac{1}{3}}$ . Такой случай будет осуществляться при  $v = c_0$ .<sup>1</sup>

Высказанные выше утверждения нуждаются в пояснениях, которые мы и дадим при помощи графика (рис. 3). На рисунке построены прямые  $OA$  и  $OB$  так, что  $\text{tg} \angle AOk = c_2$  и  $\text{tg} \angle BOk = c$ . В секторе между прямыми  $OA$  и  $OB$  проведена линия, определяемая уравнением  $\varphi = kb_2\tau_1^0$ . Эта линия касается прямой  $OA$  при  $k = 0$  и асимптотически приближается к прямой  $OB$ , когда  $k \rightarrow \infty$ . При некотором значении  $k = k_n$  эта линия проходит через точку перегиба  $n$ , в которой  $\varphi'' = 0$ , но  $\varphi''' \neq 0$ . Угол наклона касательной  $nm$  в точке перегиба обозначен буквой  $\alpha$ . При этом  $\text{tg} \alpha = c_0 < c$ . (Значения же  $c_0$  мы пока не будем определять). Если воспользоваться приведенным рисунком, то свойства функций  $\varphi_1 = kv \pm kb_2\tau_1^0$  устанавливаются без труда. На этом не будем дольше задерживаться. Заметим только, что аналитическое исследование функции  $k\tau_1^0$  могло бы быть произведено на основе уравнения (23<sub>1</sub>), дифференцирование которого дает (см. § 3, п. 21)

$$\frac{d(k\tau_1^0)}{dk} = \frac{H(1-f^2) + \tau \frac{\sqrt{1-\delta^2\tau^2}}{k} f'(\tau)}{H\delta^2\tau(1-f^2) + \frac{\sqrt{1-\delta^2\tau^2}}{k} f'(\tau)},$$

где

$$f = -\sqrt{\frac{1-\delta^2\tau^2}{1-\gamma^2\tau^2}} \frac{R^+}{p\tau^4}.$$

Перейдем к рассмотрению второго интеграла из (38), нижним пределом интегрирования в котором является постоянное во времени число  $k_2$ , а верхним пределом служит величина  $k_1$ , определяемая выражением (35<sub>1</sub>). На основании предыдущего можем утверждать, что упомянутый интеграл

<sup>1</sup> Если только  $c_0 > 0$ .

представляется формулой вида (34<sub>1</sub>), функция  $\varphi_R^{(1)}$  в которой имеет следующее значение:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_R^{(1)}(\xi, y) = & \frac{B}{2} \int_{k_2}^{k_1} e^{-k(y+y_0)} \sqrt{1-\gamma^2\tau_0^2} [\sin k\xi \cos k\Omega t + \\ & + \cos k\xi \sin k\Omega t] dk, \end{aligned}$$

где  $\xi = ct \pm x$ , а выражение  $k\Omega t$  определяется по (33). Свойства же последних интегралов устанавливаются без труда. При этом легко удастся показать, что если скорость движения ( $x = vt$ ) наблюдателя отличается от скорости  $c$ , то предыдущие интегралы убывают не медленнее чем  $t^{-1}$ . В случае же  $v = c$  закон убывания со временем функции  $\tilde{\varphi}_R^{(1)}(\xi, y)$  может оказаться более низким. Не представляет труда убедиться в том, что при значениях  $y$  и  $y_0$ , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{(y+y_0) \sqrt{1-\gamma^2\tau_0^2}}{2H \sqrt{1-\delta^2\tau_0^2}} > 1,$$

функция  $\tilde{\varphi}_R^{(1)}$  опять-таки убывает не медленнее  $t^{-1}$ , а если предыдущее неравенство не имеет места, то  $\tilde{\varphi}_R^{(1)}$  убывает подобно тому, как убывает со временем выражение (37). При этом оказывается справедливым следующее оценочное соотношение:

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}_R^{(1)}(\xi, y)| & < M \frac{NB}{4\pi H \sqrt{1-\delta^2\tau_0^2}} e^{-k_1(y+y_0)} \sqrt{1-\gamma^2\tau_0^2} \approx \\ & \approx M \frac{NB}{4\pi H \sqrt{1-\delta^2\tau_0^2}} \left[ \frac{\pi g_0}{2Nb_2 p_0^f} \right] \frac{(y+y_0) \sqrt{1-\gamma^2\tau_0^2}}{2H \sqrt{1-\delta^2\tau_0^2}}, \end{aligned}$$

в котором число  $M$  не превосходит значения нескольких единиц. Полученная только что формула показывает, что при весьма малых значениях величин  $y + y_0$  и  $\xi$  [т. е. в тех областях пространства, в которых интегралы (31) и (31<sub>1</sub>) оказываются большими] правая часть (36<sub>1</sub>) во много раз превосходит значение второго интеграла из (38). Это обстоятельство позволяет не останавливаться на более точной

оценке последнего интеграла, хотя такая оценка легко могла бы быть выполнена.

Теперь остается лишь подвести итоги исследования первых слагаемых из формул (30) и (30<sub>1</sub>). Вышеизложенным мы установили, что если наблюдатель, определяющий значение интегралов.

$$\int_0^{\infty} R_R(y, t, k) \cos kx dk, \quad \int_0^{\infty} S_R(y, t, k) \sin kx dk, \quad (39)$$

движется по закону  $x = vt$ , то относительно характера убывания (при возрастании  $t$ ) предыдущих интегралов он придет к следующим выводам: он будет считать, что если  $v < c_0$  или  $v > c_2$ , то выражения (39) убывают, как  $t^{-1}$ ; если  $c_0 < v < c$  или  $c < v < c_2$ , то (39) убывают, как  $t^{-\frac{1}{2}}$ ; если  $v = c_0$ , то (39) убывают, как  $t^{-\frac{1}{3}}$  и, наконец, если  $v = c$ , то выражения (39) при больших  $y$  и  $y_0$  убывают, как  $t^{-\frac{1}{2}}$ , а при малых  $y$  и  $y_0$  убывают медленнее, согласно формулам типа (37). При  $y = y_0 = 0$  и  $v = c$  интегралы (39) не убывают вовсе. Что же касается количественной характеристики выражений (39), то наблюдатель будет утверждать, что (при малых значениях  $y$  и  $y_0$ ) в окрестности гребня волны Релея эти интегралы представляются приближенно формулами (36) и (36<sub>1</sub>).

Вопрос о том, в какой мере сформулированные нами выводы применимы ко всем правым частям (30) и (30<sub>1</sub>), а также вопросы, связанные с физической интерпретацией наших результатов, мы сможем выяснить лишь после исследования вторых интегралов из упоминавшихся формул. Эти исследования для обоих интегралов производятся тождественными методами и показывают, что вторые интегралы формул (30) и (30<sub>1</sub>) описывают распространяющиеся в полупространстве продольные и поперечные волны. В нижеследующем мы ограничимся тем, что рассмотрим лишь второй интеграл из формулы (30).

11. В п. 7 уже упоминалось о том, что во всех точках контура ( $\lambda$ ) равномерно сходится разложение (13). Вследствие этого мы можем воспользоваться указанным разложением и можем представить подинтегральную функцию исследуемого интеграла

$$\varphi_\lambda(x, y, t) = \int_{k_0}^{\infty} R_\lambda(y, t, k) \cos kx dk, \quad (40)$$

формулой

$$R_{\lambda} = \frac{-p}{2\pi i a_2} \int_{\lambda} \frac{R-r}{r x_1 \zeta (R^+ + r)} e^{-k(y+y_0) \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} + kb_2 t \zeta} d\zeta -$$

$$- \frac{4p}{2\pi i a_2} \sum_{q=1}^{\infty} \int_{\lambda} \frac{(2+\zeta^2)^2 (-m)^{q-1}}{x_1 \zeta^5 (R^+ + r)^2} \times$$

$$\times e^{k [b_2 t \zeta - 2qH \sqrt{1+\delta^2 \zeta^2} - (y+y_0) \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}]} d\zeta; \quad (41)$$

подобной формуле (14), но отличающейся от последней тем, что в (41) бесконечный ряд уже не обрывается при значениях  $q \geq q_0$ , где  $q_0$  есть целое число, удовлетворяющее следующему неравенству:<sup>1</sup>

$$b_2 t - 2q_0 H \delta - (y + y_0) \gamma < 0. \quad (42_1)$$

Определим число  $q_0$  так, чтобы одновременно с (42<sub>1</sub>) выполнялось неравенство

$$b_2 t - 2(q_0 - 1) H \delta - (y + y_0) \gamma \geq 0 \quad (42_2)$$

и разобьем бесконечную сумму (41) на суммы слагаемых первого и второго классов. [К первому классу будем относить те слагаемые из (41), у которых  $q < q_0$ ]. Не представляет труда убедиться в том, что вся бесконечная сумма слагаемых второго класса (со значками  $q \geq q_0$ ) убывает при возрастании времени по экспоненциальному закону. Последнее утверждение есть следствие того обстоятельства, что при выполнении неравенств (42<sub>1</sub>) контур ( $\lambda$ ) интегралов из (41) можно деформировать в правую полуплоскость и можно привести, например, к некоторой окружности, с центром в начале координат, содержащей внутри себя релеевские корни уравнения (20). Во всех точках упомянутой окружности подинтегральные функции слагаемых второго класса не превосходят по модулю выражений следующего вида  $MA^{-qkt}$ , где  $M > 0$  и  $A > 1$  постоянные. Указанные же оценки легко позволяют оценить и всю сумму, что и приводит к выказанному утверждению.

<sup>1</sup> Это утверждение есть следствие того обстоятельства, что в интегралах (41) пути интегрирования ( $\lambda$ ) отличаются от прямой  $\text{Re } \zeta = \sigma > 0$ .

Итак, оказывается, что формула (41) может быть переписана следующим образом:

$$\begin{aligned}
 R_\lambda(y, t, k) = & \frac{-p}{2\pi i a_2} \int_{(\lambda)} \frac{R-r}{r x_1 \zeta (R^+ + r)} \times \\
 & \times e^{k [b_2 t \zeta - (y + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]} d\zeta - \\
 & - \frac{4p}{2\pi i a_2} \sum_{q=1}^{q_0-1} \int_{(\lambda)} \frac{(2 + \zeta^2)^2 (-m)^{q-1}}{x_1 \zeta^5 (R^+ + r)^2} \times \\
 & \times e^{k [b_2 t \zeta - 2qH \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} - (y + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]} d\zeta + O(e^{-\gamma_0 k t}),
 \end{aligned} \tag{43}$$

причем значение  $\gamma_0 > 0$  легко могло бы быть найдено.<sup>1</sup>

Нас интересует поведение при весьма больших значениях времени  $t$  результата подстановки функции  $R_\lambda(x, y, t)$  в интеграл (40), нижний предел интегрирования в котором есть фиксированное число  $k_0 > 0$ . Очевидно, что результат подстановки последнего слагаемого из (43) в (40) дает функцию, убывающую при возрастании  $t$  не медленнее чем  $t^{-1}$ . Поэтому нам остается лишь оценить результаты подстановки в (40) конечного числа интегралов из (43). Подобного же рода оценки удобно производить асимптотическими методами. Но прежде чем переходить к упомянутым оценкам, полезно выписать явные выражения „медленно изменяющихся“ функций из интегралов (43). Пользуясь (10) и (12), мы для упомянутых функций находим

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{R-r}{r x_1 \zeta (R^+ + r)} &= \frac{b_2}{p \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}} \Phi_0(\zeta), \\
 \frac{(2 + \zeta^2)^2}{x_1 \zeta^5 (R^+ + r)^2} &= b_2 \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta^2},
 \end{aligned} \right\} \tag{44}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi_0(\zeta) &= \frac{(2 + \zeta^2)^2 + 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} - p \zeta^4 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}{(2 + \zeta^2)^2 - 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + p \zeta^4 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}, \\
 \Phi(\zeta) &= \frac{\zeta^6 (2 + \zeta^2)^2}{[(2 + \zeta^2)^2 - 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + p \zeta^4 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]^2}.
 \end{aligned} \right\} \tag{45}$$

<sup>1</sup> Полезно уже сейчас отметить вытекающую из неравенств (42) формулу:  $q_0 \sim b_2 t [2H\delta]^{-1}$ , связывающую верхний предел суммирования в (43) со временем  $t$ . Этой формулой мы будем пользоваться в п. 15.

12. Оценка первого интеграла из правой части формулы (43) оказывается более простой, нежели оценка интегралов, входящих под знак суммы. Поэтому рассмотрим вторые интегралы, а для первого — лишь приведем окончательный результат.

Вводя обозначение  $Y = y + y_0$  и считая, для определенности  $Y > 0$ , рассмотрим интеграл

$$r_q(t, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(k)} F_q(\zeta) e^{kf_q(\zeta)} d\zeta, \quad (46)$$

в котором  $F_q(\zeta)$  предполагается „медленно изменяющейся“ функцией, а фаза  $f_q(\zeta)$  имеет следующее значение:

$$f_q(\zeta) = b_2 t \zeta - 2qH \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} - Y \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}. \quad (47)$$

При этом, если  $q = 0$ , то под  $F_q(\zeta)$  в (46) следует подразумевать первую функцию из (44), а в случае  $q \geq 1$  под  $F_q(\zeta)$  нужно подразумевать выражение

$$\frac{(2 + \zeta^2)^2}{\kappa_1 \zeta^5 (R^+ + r)^2} (-m)^{q-1}, \quad (44_1)$$

содержащее множитель  $(-m)^{q-1}$ . Следует отметить, что последнее выражение допустимо считать „медленно изменяющимся“ вследствие того обстоятельства, что уже при  $k = k_0 \geq 4H^{-1}$  функция

$$e^{-2qHk \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2}}$$

изменяется значительно быстрее нежели величина  $(-m)^q$ . При больших же значениях  $k$  предыдущее утверждение оказывается еще лучше выполненным.

Если учесть наш выбор ветвей радикалов, определяемый условиями, что  $\arg \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} = \arg \sqrt{1 + \zeta^2} = \arg \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} = 0$  при  $\zeta > 0$ , и если на плоскости ( $\zeta$ ) провести разрезы от точек  $\pm \frac{i}{\delta}$ ,  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$ , например параллельно отрицательной части вещественной оси, то легко можно убедиться в том, что уравнение

$$f'_q(\zeta) = b_2 t - \frac{2qH \delta^2 \zeta}{\sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2}} - \frac{Y \gamma^2 \zeta}{\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}} = 0 \quad (48)$$

имеет на основном листе плоскости ( $\zeta$ ), всего лишь четыре корня (седловые точки). Две из упомянутых седловых точек  $\zeta_q^y = \pm i\tau_q$  располагаются на мнимой оси так; что  $\tau_q > \frac{1}{\gamma}$ . Две же другие седловые точки  $\zeta_q = -\sigma_1 \pm i\tau_1$  оказываются расположенными во втором квадранте между разрезами, идущими от точек  $\pm \frac{i}{\gamma}$  и  $\pm \frac{i}{\delta}$  и не играют в оценке интеграла (46) заметной роли.

Введем в рассмотрение два положительных параметра  $t_1$  и  $t_2$ , определяемых уравнениями

$$t = t_1 + t_2, \quad (49)$$

$$\frac{Y\gamma^2 \zeta_q^{(1)}}{\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_q^{(1)2}}} = t_1 b_2, \quad \frac{2qH\delta^2 \zeta_q^{(1)}}{\sqrt{1 + \delta^2 \zeta_q^{(1)2}}} = t_2 b_2.$$

Тогда для седловых точек  $\zeta_q^{(1)} = -\zeta_q^{(2)}$  получатся формулы

$$\zeta_q^{(1)} = i\tau_q, \quad (49_1)$$

$$\tau_q = \frac{t_1 a_2}{\gamma \sqrt{t_1^2 a_2^2 - Y^2}} = \frac{t_2 a_1}{\delta \sqrt{t_2^2 a_1^2 - (2qH)^2}},$$

из которых следует

$$2qH \leq t_2 a_1 < \frac{2qH}{\sqrt{1 - \gamma^2 \delta^{-2}}}, \quad Y \leq t_1 a_2 < \infty.$$

(Напомним, что  $a_1$  есть скорость распространения волн в жидкости, а  $a_2$  — скорость распространения продольных волн в упругой среде). Из формул (49) и (49<sub>1</sub>), приводящихся к уравнениям четвертого порядка, можно было бы определить значения  $t_1$  и  $t_2$ . Мы не будем этого делать, а выразим значения  $t_1$  и  $t_2$  через параметр  $\chi$ , имеющий смысл синуса угла падения луча продольной волны, по отношению к поверхности раздела сред. При этом оказываются справедливыми следующие формулы

$$\tau_q = \frac{1}{\gamma\chi}, \quad t_1 = \frac{Y}{a_2 \sqrt{1 - \chi^2}}, \quad t_2 = \frac{2qH}{a_1 \sqrt{1 - \gamma^2 \delta^{-2} \chi^2}}. \quad (50)$$

Что же касается физического смысла величин  $t_1$  и  $t_2$ , то из нижеследующего будет ясно, что  $t_1$  обозначает время, в те-

чение которого возмущение распространялось в виде продольной упругой волны, а  $t_2$  имеет смысл времени, в течение которого возмущение распространялось в виде волны в слое жидкости.

Стационарные контуры, проходящие через седловые точки  $\zeta_q^{(v)}$ , располагаются симметрично относительно вещественной оси плоскости ( $\zeta$ ). Поэтому нам было бы достаточно рассмотреть лишь стационарный контур, проходящий через точку  $\zeta_q^{(1)}$ .

Упомянутое рассмотрение показывает, что при различных значениях чисел  $Y$  и  $q$  стационарные контуры идут различным образом, но всегда так, что контур ( $\lambda$ ) интеграла (46) (изображенный на рис. 1) может быть непрерывной деформацией совмещен с главными участками стационарных контуров, прилегающими к седловым точкам  $\zeta_q^{(v)}$ . При этом оказывается, что при  $kt \gg 1$  и при удалении от седловых точек  $\zeta_q^{(v)}$  даже на „небольшое“ расстояние вдоль ( $\lambda$ ) подинтегральная функция в (46) уже становится весьма малой. Последнее обстоятельство, как известно, может быть рассматриваемо как условие применимости метода стационарной фазы к вычислению интеграла (46). Но следует отметить, что в некоторых случаях (хотя бы при малых значениях  $Y$  и  $q$ ) приходится проводить контур ( $\lambda$ ) так, что при удалении от точек  $\zeta_0^{(v)}$  на сравнительно большие расстояния вовнутрь полуполосы  $\text{Re } \zeta < 0$ ,  $|\text{Im } \zeta| < \frac{1}{\gamma}$  этот контур уже сильно отличается от стационарных контуров функции (47), проходящих через точки  $\zeta_q^{(v)}$ . При этом на пути интегрирования в (46) могут появиться дополнительные точки экстремумов подинтегральной функции. [Так будет, например, в тех случаях, когда контур ( $\lambda$ ) проходит через вторую пару седловых точек  $\zeta$ , или же — обходит точки разветвления  $\pm i$  вдоль берегов разреза]. Весьма легко можно было бы убедиться в том, что из-за слагаемого  $[-Y \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]$  в фазовой функции (47), влияние упомянутых экстремальных точек на оценку интеграла (46) пренебрежимо мало, так как сама подинтегральная функция в этих точках оказывается относительно малой и тем меньшей, чем большее значение имеет число  $k$ . Поэтому удастся показать, что для качественной оценки интересующего нас возмущения, а также для количественной характеристики волн вблизи их фронтов достаточно производить оценку интегралов (46) лишь путем

рассмотрения окрестностей седловых точек  $\zeta_q^{(1)}$ . Такого рода рассмотрения приводят к формуле

$$r_q(t, k) = [-i]^{-\frac{-1 \pm 1}{2} F_q(\zeta_q^{(1)})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos\left(kT_q \pm \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{kQ_q}} \left[1 + O\left(\frac{1}{kQ_q}\right)\right], \quad (51)$$

в которой знаки плюс или минус берутся в зависимости от того, вещественно или чисто мнимо выражение  $F_q(\zeta_q^{(1)})$ , а величины  $T_q$  и  $Q_q$  определяются следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} T_q &= \sqrt{t_1^2 a_2^2 - Y^2} + \sqrt{t_2^2 a_1^2 - (2qH)^2}, \\ Q_q &= \gamma^2 \frac{[t_1^2 a_2^2 - Y^2]^{\frac{3}{2}}}{2Y} + \delta^2 \frac{[t_2^2 a_1^2 - (2qH)^2]^{\frac{3}{2}}}{4qH}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Не представляло бы труда написать и условия применимости предыдущей формулы, показывающие, в каких случаях для приближенного представления  $r_q$  из (46) можно ограничиться учетом лишь главного члена в (51). Не выписывая этих условий, мы лишь подчеркнем, что при очень больших значениях времени  $t$  (а нас только такие значения  $t$  и интересуют) и при синусах  $\chi$  угла падения продольной упругой волны, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{N_0}{t} \leq \chi \leq 1, \quad (53)$$

в которых  $N_0$  является большим фиксированным числом, в формуле (51) действительно можно полностью пренебречь „поправочным“ слагаемым. В заключение можно указать на то, что подробное изложение оценки интегралов вида (46) по методу стационарной фазы приводится в нашей работе о слойсто-изотропных средах [4].

13. Воспользуемся формулами (44), (45), а также — главным членом оценочной формулы (51). Тогда мы легко получим следующие приближенные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda)} \frac{(2 + \zeta^2) (-m)^{q-1}}{\zeta_1 \zeta^5 (R^+ + r)^2} \times \\ &\times e^{k [b_2 \zeta - 2qH \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} - (y + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]} d\zeta = \\ &= (-)^q |m|^{q-1} b_2 \frac{\sqrt{\tau_q^2 \delta^2 - 1}}{\tau_q^2} |\Phi(i \tau_q)| \frac{\cos\left(kT_q - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{kQ_q}}, \end{aligned} \right\} \quad (54_1)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda)} \frac{R-r}{r \lambda \zeta (R^+ + r)} \times \\ & \times e^{k [b_2 t \zeta - (y+y_0) \sqrt{1+\gamma^2 \tau^2}]} d\zeta = \frac{b_2 \Phi_0(i\tilde{\tau})}{p \sqrt{\gamma^2 \tilde{\tau}^2 - 1}} \times \\ & \times \frac{\cos\left(kT_0 - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{kQ_0}}, \end{aligned} \right\} (54_2)$$

в которых  $\tau_q$ ,  $T_q$  и  $Q_q$  имеют, соответственно, значения из (49<sub>1</sub>) и (52) при условии, что  $Y = y + y_0$ , а  $\tilde{\tau}$ ,  $T_0$  и  $Q_0$  определяются следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\tau} &= \frac{a_2 t}{\gamma \sqrt{t^2 a_2^2 - (y+y_0)^2}}, \quad T_0 = \sqrt{t^2 a_2^2 - (y+y_0)^2}, \\ Q_0 &= \gamma^2 \frac{[t^2 a_2^2 - (y+y_0)^2]^{\frac{3}{2}}}{2(y+y_0)}. \end{aligned} \right\} (55)$$

Не представляло бы труда убедиться в том, что точность формул (54) и (54<sub>2</sub>) вполне достаточна для установления полной качественной картины явлений в нашей системе, а в некоторых случаях эти формулы даже позволяют получать и точные количественные результаты.

Если воспользоваться формулами (54) и подставить значение функции  $R_\lambda(y, t, k)$  из (43) в (40), то для искомого потенциала  $\varphi_\lambda(x, y, t)$  мы получим окончательное выражение:

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(x, y, t) &= \sum_{q=0}^{q_0-1} \varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t) \approx -\gamma \frac{\Phi_0(i\tilde{\tau})}{\sqrt{\gamma^2 \tilde{\tau}^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Q_0}} \times \\ & \times \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos\left(kT_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cos kx}{\sqrt{k}} dk + 4p\gamma \sum_{q=1}^{q_0-1} \frac{\sqrt{\tau_q^2 \delta^2 - 1}}{\tau_q^2 \sqrt{Q_q}} \times \\ & \times |\Phi(i\tau_q)| (-m)^{q-1} \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos\left(kT_q - \frac{\pi}{4}\right) \cos kx}{\sqrt{k}} dk + O\left(\frac{1}{t}\right), \end{aligned} \quad (56)$$

из которого уже нетрудно получить все интересующие нас физические следствия.

Введем следующие обозначения:

$$\xi_q = T_q - x; \quad \eta_q = T_q + x \quad (57)$$

и будем рассматривать такие точки нашей системы, в которых  $x = vt > 0$ . Вычисляя интегралы, входящие в (56), мы получаем формулу

$$I_q = \int_{k_0}^{\infty} \frac{\cos\left(kT_q - \frac{\pi}{4}\right) \cos kx}{\sqrt{k}} dk = \frac{1}{2\sqrt{2|\xi_q|}} \int_{k_0|\xi_q|}^{\infty} \frac{\cos \lambda \pm \sin \lambda}{\sqrt{\lambda}} d\lambda + \\ + \frac{1}{2\sqrt{2\eta_q}} \int_{k_0\eta_q}^{\infty} \frac{\cos \lambda \pm \sin \lambda}{\sqrt{\lambda}} d\lambda, \quad (58)$$

в которой знак плюс берется для точек, где  $\xi_q > 0$ , а знак минус берется в том случае, если  $\xi_q < 0$ . Учитывая (57), мы сразу же убеждаемся в том, что второе слагаемое в (58) имеет величину порядка

$$\frac{1}{\eta} = O\left(\frac{1}{t}\right).$$

Что же касается первого интеграла в (58), то при малых значениях  $\xi_q > 0$  он представляется формулой

$$I_q \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\xi_q}}, \quad (58_1)$$

тем более точной, чем меньшее значение имеет величина  $\xi_q$ . При больших же значениях  $|\xi_q|$  (как положительных, так и отрицательных) первый интеграл в (58) имеет величину, сравнимую с

$$\frac{1}{|\xi_q|}.$$

Наконец, при малых отрицательных значениях  $\xi_q$  первый интеграл в (58) имеет значение, сравнимое с  $\sqrt{|\xi_q|}$ .

Резюмируя изложенное, можем написать следующие качественные соотношения:

$$I_q = O\left(\frac{1}{|\xi_q|}\right), \quad \text{если } |\xi_q| > 1, \quad (59_1)$$

и

$$I_q = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\xi_q}} + O(\sqrt{\xi_q}) & \text{при } \xi_q > 0, \\ O(\sqrt{|\xi_q|}) & \text{при } \xi_q < 0, \end{cases} \quad (59_2)$$

если  $|\xi_q| < 1$ .

Последние соотношения позволяют установить физический смысл слагаемых в формуле (56) [а следовательно, и физический смысл выражений

$$\varphi_\lambda^{(q)} = \int_{k_0}^{\infty} \cos kx dk \frac{4p}{2\pi i a_2} \int_{x_1 \zeta^5}^{(2+\zeta^2)^2} \frac{(-m)^q}{(R^+ + r)^2} e^{kfq(\zeta)} d\zeta, \quad (60)$$

получающихся подстановкой в (40) слагаемых из (43)], а также позволяют дать качественную оценку всей функции  $\varphi_\lambda(x, y, t)$  из (56). К выяснению упомянутых вопросов (завершающих настоящую работу) мы сейчас и перейдем, причем начнем с рассмотрения функций (60). Это нам даст геометрическую оптику (для продольных волн) в системе „упругое полупространство и слой жидкости“, а также позволит количественно оценить возмущения вблизи фронтов отраженных волн.

14. Пользуясь формулами (59) и (56), убеждаемся в том, что функции  $\varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t)$  из (60) являются всюду непрерывными, за исключением поверхностей

$$\xi_q = \sqrt{t_1^2 a_2^2 - (y + y_0)^2} + \sqrt{t_2^2 a_1^2 - (2qH)^2} - x = 0, \quad (61)$$

в точках которых они обращаются в бесконечность. Вблизи поверхностей  $\xi_q = 0$  для функций  $\varphi_\lambda^{(q)}$  имеем количественные оценки, точность которых весьма велика при достаточно малых значениях  $\xi_q$ . Упомянутые оценки показывают, что при  $\xi_q < 0$  [т. е. впереди фронта (61)] справедливо соотношение

$$\varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t) = O\left(\frac{1}{t}\right),$$

а при  $\xi_q > 0$  [т. е. позади фронта (61)] имеет место следующее равенство:

$$\varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t) = \frac{2p\gamma\sqrt{\tau_q^2\delta^2 - 1}|\Phi(i\tau_q)|}{\tau_q[\tau_q\sqrt{Q_q}]} [-m(i\tau_q)]^q \sqrt{\frac{\pi}{\xi_q}}, \quad (62)$$

в котором  $\tau_q$  определяется по (49<sub>1</sub>) или (50),  $m(\zeta)$  и  $\Phi(\zeta)$  имеют значения, соответственно, из (25) и (45) и, наконец,  $Q_q$  определяется второй формулой (52) при условии, что  $Y = y + y_0$ .

Для установления физического смысла возмущения  $\varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t)$  разобьем величину  $x$  из (61) на сумму  $x = x_1 + x_2$  таких слагаемых, для которых выполняются равенства.

$$x_1 = \sqrt{t_1^2 a_2^2 - (y + y_0)^2}; \quad x_2 = \sqrt{t_2^2 a_1^2 - (2qH)^2} \quad (63)$$

и воспользуемся результатами теории характеристик. Тогда мы легко убеждаемся в том, что функция  $\varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t)$  описывает возмущение, дошедшее от источника до границы жидкости в виде продольной упругой волны, преломившееся в жидкость и испытавшее в слое жидкости  $q$  отражений от свободной поверхности  $y = -H$ , и, наконец, преломившееся в упругое полупространство по закону преломления продольной волны. Если связать распространение поверхности (61) разрыва волны  $\varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t)$  с лучами (или бихарактеристиками), то без труда можно определить углы падения (или преломления) продольной упругой волны и волны в слое жидкости. При этом оказывается, что

$$\left. \begin{aligned} \chi = \sin \varphi_{11} &= \frac{x_1}{t_1 a_2} = \frac{1}{\gamma \tau_q}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{\delta \tau_q}, \\ \chi &= \sin \varphi_{11} = \frac{\delta}{\gamma} \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

где  $\tau_q$  определяется по (49<sub>1</sub>), а  $\varphi_{11}$  и  $\varphi$  обозначают углы падения (и преломления), соответственно, продольной и „жидкостной“ волн.

Последнее соотношение (64) представляет закон преломления волн и описывает явление полного внутреннего отражения (которое в нашей задаче не проявляется). Но все же из последней формулы (64) вытекает полезный для нас результат, заключающийся в том, что источник в упругой

среде порождает в жидкости лишь волны, для углов падения  $\varphi$  которых всегда выполняются неравенства

$$0 \leq \sin \varphi \leq \sin \varphi_{\text{пред}} = \frac{\gamma}{\delta}, \quad (64)$$

с правой частью  $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{a_1}{a_2}$ , меньшей единицы. Предыдущее неравенство позволяет оценить величины расстояний (вдоль оси абсцисс  $O\chi$ ) между соседними фронтами волн, углы падения которых превосходят некоторую фиксированную величину  $\chi_0 > 0$ . Для нас будет достаточно знать, что все эти расстояния оказываются больше некоторого значения  $\Delta_0 > 0$ .

Обратимся снова к формуле (62), характеризующей функцию  $\varphi_\lambda^{(q)}$  в окрестности ее фронта (61). Из вида упомянутой формулы вытекает, что множитель

$$A_q = \frac{2p \gamma \sqrt{\tau_q^2 \delta^2 - 1} |\Phi(i \tau_q)|}{\tau_q [\tau_q \sqrt{Q_q}]} [-m(i \tau_q)]^q \quad (65)$$

следует толковать как интенсивность повторной волны  $\varphi_\lambda^{(q)}$ .

Если учесть, что при  $\tau_q > \frac{1}{\gamma}$  выполняется соотношение  $|m(i \tau_q)| < 1$ , а также если заметить, что всегда справедливо неравенство

$$[\tau_q \sqrt{Q_q}]^{-1} < \frac{\sqrt{\tau_q}}{t}, \quad (66)$$

то легко можно установить зависимость интенсивности  $A_q$  от времени  $t$  и от числа  $q$ . Из (65) следует, что при  $q = \text{const}$  и возрастающем  $t$  интенсивность  $A_q$  убывает не медленнее чем  $t^{-1}$ . При увеличении же числа  $q$  (т. е. при увеличении числа отражений от свободной поверхности жидкости) рассматриваемая интенсивность уменьшается приблизительно в отношении  $|m(i \tau_q)|^q$ . Подобное уменьшение интенсивности есть следствие распределения энергии преломляющейся „жидкостной“ волны между отраженной от поверхности  $y=0$  волной, а также волной, преломленной в упругое полупространство. Кроме указанного, формула (65) позволяет характеризовать интенсивность исследуемой волны в зависимости от угла ее падения. На этом вопросе не будем подробнее останавливаться. В заключение отметим важное для нижеследующего обстоятельство (вытекающее из предыдущих оценок) и заключающееся в том, что если двигаться

вместе с волной  $\varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t)$  вдоль линии  $y = \text{const}$ , сохраняя постоянным расстояние  $|\xi_q| = \varepsilon$  от фронта  $\xi_q = 0$ , то с течением времени функция  $\varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t)$  будет убывать не медленнее чем  $t^{-1}$ . Последнее утверждение позволит нам убедиться в том, что если исключить из рассмотрения промежутками  $(t_q - \varepsilon, t_q + \varepsilon)$  моменты  $t_q$  времени прохождения мимо наблюдателя фронтов (61) преломленных волн, то суммарное возмущение  $\varphi_\lambda(x, y, t)$  (61) окажется убывающим с течением времени не медленнее чем  $t^{-\alpha}$ , где  $\alpha > 0$  является любым числом, меньшим единицы. К этому вопросу мы сейчас и переходим.

15. При оценке возмущения  $\varphi_\lambda(x, y, t)$  из (56) будем предполагать, что наблюдатель движется вдоль прямой  $y = \text{const}$  по закону  $x = vt$  (где  $v > 0$ ) и будем рассматривать лишь такие моменты времени  $t$ , при которых расстояние ближайшего фронта (61) от наблюдателя (отсчитанное вдоль упомянутой прямой) превосходит фиксированное значение  $\varepsilon > 0$ . Выберем малое фиксированное число  $\chi_0 > 0$  и разобьем все повторные волны на два класса, причем к первому будем относить такие волны (с номерами  $q \leq q_1$ ), для углов падения лучей которых имеет место неравенство  $\chi \geq \chi_0$ .<sup>1</sup> Тогда, как уже упоминалось, можно указать такое число  $\Delta_0 > 0$ , что расстояния между фронтами волн первого класса всегда будут больше  $\Delta_0$  (т. е.  $|\Delta \xi_q| > \Delta_0$ , при  $q \leq q_1$ ).

Пользуясь формулой (56), а также оценками интегралов (58), убеждаемся в существовании такого, не зависящего от времени  $t$  числа  $M_0$ , что оказывается справедливым следующее неравенство:<sup>2</sup>

$$|\varphi_\lambda(x, y, t)| < M_0 \sum_{q=0}^{q_0} \frac{1}{\tau_q \sqrt{Q_q}} \frac{1}{|\xi_q|}. \quad (67)$$

Поэтому нам остается лишь оценить сумму, входящую в правую часть (67), а это легко выполнить.

Обозначим через  $q_2$  и  $q_2 + 1$  номера фронтов волн, ближайших к движущемуся наблюдателю. (Мы всегда можем считать  $q_2 < q_1$ , где  $q_1$  определяет сечение волн

<sup>1</sup> Здесь речь идет о лучах, соответствующих точкам пересечения фронтов (61) с прямой  $y = \text{const}$ .

<sup>2</sup> Заметим, что верхний предел суммирования  $q_0$  в правой части (67) имеет значение  $q_0 \approx b_2 t [2H \delta]^{-1}$ .

на два класса.) Тогда, очевидно, будут справедливы неравенства

$$|\xi_q| > |\xi_{q_2}| + (q_2 - q) \Delta_0 > \varepsilon + (q_2 - q) \Delta_0, \text{ если } q \leq q_2,$$

$$|\xi_q| > |\xi_{q_2+1}| + (q - q_2 - 1) \Delta_0 > \varepsilon + (q - q_2 - 1) \Delta_0,$$

если  $q_2 + 1 \leq q < q_1$ .

Пользуясь такими неравенствами, а также неравенством (66) и формулой (50), получаем

$$\sum_{q=0}^{q=q_1} \frac{1}{\tau_q \sqrt{Q_q}} \cdot \frac{1}{|\xi_q|} < \frac{2}{\sqrt{\gamma \chi_0} t} \sum_{q=0}^{q=q_0} \frac{1}{\varepsilon + q \Delta_0} < \frac{N_1}{t} \log t, \quad (68)$$

где  $N_1$  — некоторое постоянное число.

Переходя к оценке суммы из (67), распространенной на слагаемые второго класса, мы заметим, что из (50) для таких слагаемых следует

$$t_1 \approx \frac{Y}{a_2} \ll t, \quad t_2 = t - t_1 \approx t,$$

откуда получаются следующие приближенные соотношения:

$$\tau_q \approx \frac{a_1 t}{\delta \sqrt{t^2 a_1^2 - (2qH)^2}}; \quad Q_q \approx \delta^2 \frac{(t^2 a_1^2 - (2qH)^2)^{\frac{3}{2}}}{4qH};$$

$$\xi_q \approx \sqrt{t^2 a_1^2 - (2qH)^2} - vt.$$

Заметим, что мы всегда могли бы выбрать число  $\chi_0$  настолько малым (а следовательно, число  $q_1$  — настолько большим), чтобы выполнялось неравенство

$$|\xi_q| \equiv |T_q - vt| > Bt \text{ при } q \geq q_1 + 1, \quad (69)$$

где  $B$  — некоторая постоянная, а  $T_q$  имеет значение из (52). Будем считать, что такой выбор был произведен с самого начала и обозначим через  $n < q_0$  разность

$$n = q_0 - q, \text{ где } q \geq q_1 + 1$$

максимального значения  $q_0$ , входящего в (67), и номера  $q$  — волны второго класса. Тогда легко получаем неравенство

$$\tau_q \sqrt{Q_q} \geq \sqrt{2} a_1 H \frac{t(2q_0 n - n^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{q_0 - n}} > \sqrt{2} a_1 H \frac{t}{q_0^{\frac{1}{4}}} n^{\frac{1}{4}}, \quad (69_2)$$

при помощи которого, а также неравенства (69<sub>1</sub>), получаем интересующую нас окончательную формулу

$$\sum_{q=q_1+1}^{q_0} \frac{1}{\tau_q \sqrt{Q_q}} \frac{1}{|\xi_q|} < \frac{q_0^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2} a_1 H t^2 B} \sum_{q=q_1+1}^{q_0} \frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{2 \sqrt{2} a_1 H^2 B t} \quad (70)$$

Сопоставляя (68) и (70) с (67), убеждаемся в том, что для функции  $\varphi_\lambda(x, y, t)$  оказывается справедливой следующая асимптотическая оценка

$$|\varphi_\lambda(x, y, t)| < \frac{M}{t^\alpha}, \quad (71)$$

в которой  $\alpha > 0$  есть любое число, меньшее единицы, а  $M$  обозначает не зависящую от  $t$  постоянную.

Оценка (71) вполне достаточна, чтобы считать достигнутой цель, поставленную нами в начале исследования.

### § 3. Дополнения

16. В § 1 мы предполагали, что источник возмущений создает поле, характеризующееся потенциалами (1). Такого рода источник является весьма мощным и едва ли может осуществиться на практике, так как он порождает бесконечные разрывы на характеристиках не только у поля смещений, но и у поля потенциалов.

Выбор источника (1) в § 1 объяснялся желанием облегчить сопоставление наших методов решения задачи с методами Н. В. Зволинского. Теперь же, в целях приближения постановки задачи к физическим условиям возбуждения сейсмических волн, представляется естественным построить поле смещений, вызванное действием некоторого менее интенсивного источника. В качестве такового можно, на-

пример, взять источник, поле которого получается из (1) интегрированием в промежутке  $(- \varepsilon, t)$ , где  $\varepsilon > 0$ . Поле такого источника, правда, обладает некоторой статической частью. Но от последней можно было бы освободиться обычным путем „выключения“ действия источника в некоторый момент времени  $T > 0$ .

Итак, предположим, что потенциалы источника возмущений, расположенного в полупространстве, представляются следующими формулами:

$$\tilde{\varphi}_0 = \int_0^{\infty} \tilde{R}_0(t, y, k) \cos kx dk, \quad (72)$$

где

$$\tilde{R}_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{-(y-y_0) \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a_2^2}}}}{a_2 s \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a_2^2}}} e^{st} ds. \quad (73)$$

при значениях  $y > y_0$  и

$$\tilde{R}_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{(y-y_0) \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a_2^2}}}}{a_2 s \sqrt{k^2 + \frac{s^2}{a_2^2}}} e^{st} ds \quad (73_1)$$

при значениях  $y < y_0$ .

Если воспользоваться результатами § 1, то легко можно было бы убедиться в том, что потенциалы поля упругих смещений в полупространстве, соответствующие источнику (72), представляются формулами

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 &= \int_0^{\infty} R(t, y, k) \frac{\cos kx}{k} dk, \\ \psi_2 &= \int_0^{\infty} S(t, y, k) \frac{\sin kx}{k} dk, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned}
 R &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{[p \zeta^4 \operatorname{sh} \alpha - \sqrt{\frac{1+\delta^2 \zeta^2}{1+\gamma^2 \zeta^2}} \bar{R} \operatorname{ch} \alpha]}{a_2 \zeta \Delta_0(k, \zeta)} \times \\
 &\quad \times e^{-k(y+y_0)\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} + kb_2 t \zeta} d\zeta, \\
 S &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{4 \sqrt{1+\delta^2 \zeta^2} (2+\zeta^2) \operatorname{ch} \alpha}{a_2 \zeta \Delta_0(k, \zeta)} \times \\
 &\quad \times e^{-yk\sqrt{1+\zeta^2} - y_0 k \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} + kb_2 t \zeta} d\zeta,
 \end{aligned} \right\} (75)$$

а величины  $p$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$  и т. д. имеют значения из § 1 нашей работы.

Перейдем от потенциалов (74) к компонентам поля упругих смещений  $\vec{u} = u \vec{i} + v \vec{j}$  по формулам

$$u = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}$$

Тогда получим для компонент поля смещений [дополнительного к полю смещений источника (72), действующего в безграничном упругом пространстве] окончательные выражения

$$\left. \begin{aligned}
 u(x, y, t) &= - \int_0^{\infty} U(t, y, k) \sin kx dk, \\
 v(x, y, t) &= - \int_0^{\infty} V(t, y, k) \cos kx dk,
 \end{aligned} \right\} (76)$$

в которых

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} p \zeta^4 \operatorname{sh} \alpha - \sqrt{\frac{1+\delta^2 \zeta^2}{1+\gamma^2 \zeta^2}} \bar{R} \operatorname{ch} \alpha e^{-k(y+y_0)\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} + kb_2 t \zeta} d\zeta + \\
 &+ \frac{4}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \frac{(2+\zeta^2) \sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\delta^2 \zeta^2} \operatorname{ch} \alpha}{a_2 \zeta \Delta_0(k, \zeta)} e^{-ky\sqrt{1+\zeta^2} - ky_0\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} + kb_2 t \zeta} d\zeta, \quad (77)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_0)} \frac{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \left[ p\zeta^4 \operatorname{sh} \alpha - \sqrt{\frac{1+\delta^2\zeta^2}{1+\gamma^2\zeta^2}} \bar{R} \operatorname{ch} \alpha \right]}{a_2\zeta\Delta_0(k, \zeta)} \times \\
 & \times e^{-k(y+y_0) \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} + kb_2t \zeta} d\zeta + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_0)} \frac{4\sqrt{1+\delta^2\zeta^2} (2+\zeta^2) \operatorname{ch} \alpha}{a_2\zeta\Delta_0(k, \zeta)} e^{-ky \sqrt{1+\zeta^2} - ky_0 \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} + kb_2t\zeta} d\zeta, \quad (78)
 \end{aligned}$$

причем в последних формулах интегрирование совершается в положительном направлении вдоль прямой  $\operatorname{Re} \zeta = \sigma > 0$ , а ветви радикалов определяются так же, как и в § 1.

Сравнение формул (76) с формулами (16) и (17) для потенциалов убеждает нас в том, что исследование полей смещений (76) может быть выполнено в точности по предыдущему.

В заключение заметим, что при  $t \rightarrow \infty$  значения  $u(x, y, t)$  и  $v(x, y, t)$  в каждой фиксированной точке пространства не обращаются в нуль, а приближаются к постоянным значениям  $u_0(x, y)$  и  $v_0(x, y)$ , получаемым из (76) в результате подстановки в правые части последних формул вместо  $U$  и  $V$ , соответственно, вычетов подинтегральных функций (77) и (78) в точке  $\zeta = 0$ . Легко можно было бы убедиться в том, что статические части  $u_0$  и  $v_0$  смещений отсутствовали бы в том случае, если бы мы совершили при  $t = T > 0$  „выключение“ воздействия (72). Совершенно так же эти части отсутствовали бы и в том случае, если бы мы рассматривали источник типа (1).

17. При исследовании корней уравнения

$$\Delta_0 \equiv p\zeta^4 \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \operatorname{sh} \alpha + \sqrt{1+\delta^2\zeta^2} \bar{R}^+ \operatorname{ch} \alpha = 0, \quad (20)$$

в котором

$$\alpha = Hk \sqrt{1+\delta^2\zeta^2}; \quad \bar{R}^+ = (2+\zeta^2)^2 - 4\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}, \quad (10)$$

мы сначала будем считать, что разрезы проведены вдоль мнимой оси вне промежутка  $(-i, i)$  и что ветви радикалов фиксируются указанными в п. 2 § 1 условиями:

$$\operatorname{arg} \sqrt{1+\zeta^2} = \operatorname{arg} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta > 0.$$

[Заметим, что третье условие, касающееся радикала  $\sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2}$ , нет необходимости рассматривать, так как корни уравнения (20) не зависят от выбора ветви  $\sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2}$ .]

Основной результат, касающийся корней уравнения (20), получаемый методом приращения аргумента функции  $\Delta_0(k, \zeta)$  при обходе правой полуокружности бесконечно большого радиуса, заключается в том, что уравнение (20) не имеет корней в правой полуплоскости. Этот результат сразу же распространяется и на левую полуплоскость, если заметить что при переходе через промежуток  $(-i, i)$  от точки  $M$  правой полуплоскости в симметричную относительно мнимой оси точку  $M'$  левой полуплоскости выражение  $\Delta_0(k, \zeta)$  принимает (с точностью до множителя  $\pm 1$ ) комплексно сопряженные значения.

Итак, если проводить разрезы вдоль мнимой оси вне промежутка  $(-i, i)$ , то корни уравнения (20) могут находиться лишь в промежутке  $(-i, i)$  мнимой оси или же на берегах разрезов.

Будем теперь поворачивать разрезы, идущие от точек  $\pm \frac{i}{\gamma}$  в левую полуплоскость до совпадения с прямыми  $\text{Im } \zeta = \pm \frac{1}{\gamma}$ ,  $\text{Re } \zeta \leq 0$ . Тогда на основном листе плоскости ( $\zeta$ ) появится еще бесконечное множество корней уравнения (20), расположенных в левой полуплоскости (симметрично относительно вещественной оси) вне полосы  $|\text{Im } \zeta| < \frac{1}{\gamma}$ .

Действительно, если считать  $|\zeta| \gg 1$ , то в указанных областях плоскости ( $\zeta$ ) будет  $\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \approx \gamma \zeta$ . Поэтому уравнение (20) перепишется в следующем виде:

$$p\gamma (1 + 0(\zeta^{-2})) \text{sh } Hk\delta\zeta + \delta (1 + 0(\zeta^{-2})) \text{ch } Hk\delta\zeta = 0$$

или, приближенно,

$$p\gamma \text{sh } Hk\delta\zeta = -\delta \text{ch } Hk\delta\zeta.$$

Полагая  $Hk\delta\zeta = x + iy$ , учитывая неравенство  $\frac{p\gamma}{\delta} = \frac{\rho_1 a_1}{\rho_2 a_2} < 1$

и решая последнее уравнение, находим:

$$Hk\delta\zeta_n = -x_0 \pm i\nu\pi, \tag{79}$$

где  $\nu$  — целое число, а  $x_0 > 0$  определяется из равенства

th  $x_0 = \frac{p\gamma}{\delta}$ . Заметим, что предыдущая формула приближенно справедлива лишь при  $\nu k^{-1} \gg 1$ .

Переместим теперь разрезы, соединяющие точки  $\left(-\frac{i}{\gamma}, -i\right)$  и точки  $\left(i, \frac{i}{\gamma}\right)$ , в левую полуплоскость параллельно самим себе так, чтобы их концы оставались на прямых  $\text{Im } \zeta = \pm 1$  и  $\text{Im } \zeta = \pm \frac{1}{\gamma}$ . Тогда на основном листе плоскости ( $\zeta$ ), быть может, еще появится некоторое конечное число новых корней уравнения (20). Но относительно всех этих корней (если они появляются), равно как и относительно всех корней, малых по модулю, расположенных вне полосы  $|\text{Im } \zeta| < \frac{1}{\gamma}$ , можно высказать достаточно для наших целей очевидное утверждение, что существует такое  $\sigma_0 > 0$ , при котором для всех корней  $\zeta$ , будут справедливы следующие неравенства:

$$k \text{Re } \zeta_\nu = -k\tau_\nu < -\sigma_0 < 0. \quad (24_1)$$

[Для  $\zeta_\nu$ , больших по модулю, (24<sub>1</sub>) вытекает из (79). При „малых“ же значениях корней  $\zeta_\nu$ , соответствующих величинам  $k$ , заключенным в промежутке  $0 \leq k \leq k_0$ , неравенство (24<sub>1</sub>) очевидно вследствие конечности числа этих корней.]

Итак, мы видим, что если выбрать  $\sigma_0$  достаточно малым, то можно считать (24<sub>1</sub>) справедливым для всех корней, расположенных в левой полуплоскости.

Теперь остается рассмотреть лишь точки мнимой оси. Полагая в уравнении (20)  $\zeta = \pm i\tau$  и считая  $\tau > 0$ , мы сразу же убеждаемся в том, что не существует корней при  $\tau > 1$ . (Это есть следствие невозможности одновременных равенств  $\sin \alpha = \cos \alpha = 0$ .) Обозначим, соответственно, через  $\tau_0$  и  $\vartheta$  корни уравнения (20<sub>1</sub>), а также уравнения

$$\bar{R}^+(\tau) \equiv (2 - \tau^2)^2 - 4\sqrt{1 - \tau^2} \sqrt{1 - \gamma^2\tau^2} = 0.$$

Если считать  $0 < \tau < \frac{1}{\gamma}$ , переписать уравнение (20) в виде

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\equiv p\tau^4 \sqrt{1 - \gamma^2\tau^2} \text{sh } Hk \sqrt{1 - \delta^2\tau^2} + \\ &+ \sqrt{1 - \delta^2\tau^2} \bar{R}^+(\tau) \text{ch } Hk \sqrt{1 - \delta^2\tau^2} \equiv \\ &\equiv \frac{e^{Hk \sqrt{1 - \delta^2\tau^2}}}{2} \left\{ p\tau^4 \sqrt{1 - \gamma^2\tau^2} + \sqrt{1 - \delta^2\tau^2} \bar{R}^+(\tau) + \right. \\ &\left. + [\sqrt{1 - \delta^2\tau^2} \bar{R}^+(\tau) - p\tau^4 \sqrt{1 - \gamma^2\tau^2}] e^{-2Hk \sqrt{1 - \delta^2\tau^2}} \right\} = 0 \end{aligned}$$

и учесть, что при  $\tau < \vartheta$  имеет место  $\bar{R}^+(\tau) < 0$ , а при  $\tau > \vartheta$  будет  $\bar{R}^+(\tau) > 0$ , то легко убедиться в существовании одного релеевского корня  $\tau_1^0$  уравнения (20), удовлетворяющего неравенствам

$$\tau_0 < \tau_1^0 < \frac{1}{\delta}, \quad \tau_0 < \tau_1^0 < \vartheta.$$

При больших  $k$  приближенное значение  $\tau_1^0$  определяется формулой (22). При малых же  $k$  зависимость величины  $k\tau_1^0(k)$  от  $k$  можно было бы пытаться установить исследованием (23<sub>1</sub>). Но такого рода исследования оказываются весьма громоздкими. Поэтому мы устанавливали необходимую для нас зависимость, изображенную на рис. 3, графическими приемами.

Наконец, если  $\frac{1}{\delta} < \tau < 1$ , то уравнение (20) принимает вид (23<sub>2</sub>). Представляется очевидным, что при любом фиксированном  $k$  такое уравнение может иметь лишь конечное число простых корней.

18. Рассмотрим теперь функцию  $R$  из (17). Если обозначить через  $\zeta_v = -x_v(k) + iy_v(k)$  корень уравнения (20), не лежащий на мнимой оси, то легко можно вычислить вычет подынтегральной функции (17) в точке  $\zeta_v$ .

Результат вычисления вычетов будет различным в зависимости от того, является ли  $\zeta_v$  простым корнем уравнения (20) или же кратным. Повидимому можно утверждать, что все корни уравнения (20) являются простыми. Но для наших целей это обстоятельство не имеет никакого значения, вследствие чего мы будем считать, что  $\zeta_v$  является корнем уравнения (20) кратности  $m \geq 1$ .

Не представляет труда убедиться в том, что вычет подынтегральной функции (17) в точке  $\zeta_v$  выражается формулой вида

$$\begin{aligned} & \Phi_0(\zeta_v) e^{-k[b_2 x_v t + A_v] - ikB_v} + \dots + \\ & + \Phi_{m-1}(\zeta_v) (kt)^{m-1} e^{-k[b_2 x_v t + A_v] - ikB_v}, \end{aligned} \quad (80)$$

в которой  $A_v = (y + y_0) \operatorname{Re} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_v^2}$ ;  $B_v = (y + y_0) \operatorname{Im} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_v^2}$ ; а  $\Phi_k(\zeta_v)$  представляют собой какие-то постоянные, не зависящие от  $k$  и  $t$ . Воспользуемся теперь неравенствами (24<sub>1</sub>)

На основании этих неравенств можем утверждать, что при больших значениях  $t$  сумма (80) не будет превосходить выражения

$$ct^{m-1} e^{-\sigma_0 t},$$

где  $c$  и  $\sigma_0 > 0$  — постоянные. Вследствие же этого обстоятельства становится ясным, что результат подстановки в (19<sub>1</sub>) (вместо  $R$ ) конечной суммы вычетов подинтегральной функции (17) во всех не очень больших по модулю ( $k = k_0$ ) корнях  $\zeta$ , уравнения (20) убывает с возрастанием времени по экспоненциальному закону.

Обратимся теперь к рассмотрению корней  $\zeta$ , уравнения (20), больших по модулю и при значении  $k = k_0$ . Ранее мы могли убедиться в том, что такие корни являются простыми и что они представляются формулами (24). Пользуясь последними формулами, нетрудно вычислить вычеты подинтегральной функции (17) и составить интересующую нас бесконечную сумму. Эта сумма имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2b_2 p e^{-\frac{x_0}{H\delta} [b_2 t - (y + y_0) \gamma]}}{Ha_2 [p^2 \gamma^2 - \delta^2]} \times \\ &\times \sum_{\nu > 1} \left\{ \frac{i \frac{\pi}{H\delta} [b_2 t - (y + y_0) \gamma]^\nu}{\frac{x_0}{H\delta} - i \frac{\pi}{H\delta}} + \right. \\ &+ \left. \frac{e^{\frac{i\pi}{H\delta} [b_2 t - (y + y_0) \gamma]}}{\frac{x_0}{H\delta} + i \frac{\pi\nu}{H\delta}} \right\} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right] = \\ &= \frac{2b_2 p e^{-\frac{x_0}{H\delta} [b_2 t - (y + y_0) \gamma]}}{Ha_2 [\delta^2 - p^2 \gamma^2]} \times \\ &\times \sum_{\nu > 1} 2 \frac{H\delta}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{H\delta} [b_2 t - (y + y_0) \gamma]^\nu}{\nu} \times \\ &\times \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

Написанная сумма сходится при любых значениях  $t$  и является ограниченной. Поэтому существует такое постоянное число  $c_1$ , что оказывается выполненным следующее неравенство:

$$|Q| < c_1 e^{-\frac{x_0}{H^2} [b_2 t - (v + y_0) t]}$$

Теперь же представляется совершенно очевидным, что результат подстановки в (19<sub>1</sub>) (вместо  $R$ ) выражения  $Q$  убывает по экспоненциальному закону при возрастании времени.

19. При оценке результата подстановки в (19<sub>1</sub>) вместо  $R$  интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(l^+ + l^-)} \frac{b_2}{a_2} \frac{p \zeta^4 \operatorname{sh} \alpha - \sqrt{\frac{1 + \delta^2 \zeta^2}{1 + \gamma^2 \zeta^2}} \bar{R} \operatorname{ch} \alpha}{\Delta_0(k, \zeta)} \times \\ \times e^{k [b_2 \zeta - (v + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}] d\zeta}, \quad (82)$$

распространенного по контуру  $(l^+ + l^-)$ , охватывающему разрез на рис. 2, мы будем пользоваться формулой

$$\Delta_0(k, \zeta) = \varphi_1(k, \zeta) - \varphi_2(k, \zeta), \quad (83)$$

в которой

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= p \zeta^4 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \operatorname{sh} \alpha + \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} (2 + \zeta^2)^2 \operatorname{ch} \alpha, \\ \varphi_2 &= 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \sqrt{1 + \delta^2 \zeta^2} \operatorname{ch} \alpha. \end{aligned} \right\}$$

Разобьем контур  $(l^+ + l^-)$  на две части:  $(l_1^+ + l_1^-)$  и  $(l_2^+ + l_2^-)$ . Под  $l_1^+$  и  $l_1^-$  будем понимать контуры, проходящие, соответственно, по противоположенным берегам разрезов между точками  $(-\frac{i}{\gamma}, B^-, A^-, -i)$ , а также — между точками  $(i, A^+, B^+, \frac{i}{\gamma})$ . А под  $l_2^+$  и  $l_2^-$  будем понимать контуры, проходящие, соответственно, по противоположенным берегам разрезов, идущих от точек  $B^\pm$  на бесконечность. Направления всех упомянутых контуров помечены стрелками на рис. 2.

Если учесть, что на противоположенных берегах разрезов, охватываемых контуром  $(l_1^+ + l_1^-)$ , радикал  $\sqrt{1 + \zeta^2}$  принимает различные знаки, то легко убедиться в том, что интеграл (82), распространенный по контуру  $(l_1^+ + l_1^-)$  приводится к интегралу вида

$$\int_{l_1^+} \Phi(k, \zeta) \sqrt{1 + \zeta^2} e^{k[b_2 t \zeta - (y + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]} d\zeta,$$

путь интегрирования в котором проходит лишь по одному берегу разрезов. При этом  $\Phi(k, \zeta)$ , равно как и  $\frac{d\Phi(k, \zeta)}{dk}$ , оказываются непрерывными функциями при всех значениях  $k$  и  $\zeta$ .

Подставляя предыдущий интеграл в (19<sub>1</sub>), переставляя порядок интегрирования по  $k$  и  $\zeta$  и интегрируя по частям относительно  $k$ , мы получаем выражение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \int_{(l_1^+)} \frac{\sqrt{1 + \zeta^2} \Phi(k, \zeta) e^{kf}}{b_2 \zeta - \frac{y + y_0}{t} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + iv} \Big|_0^{k_0} d\zeta - \\ & - \frac{1}{t} \int_0^{k_0} dk \int_{(l_1^+)} \frac{\sqrt{1 + \zeta^2} e^{kf} \left[ \frac{d\Phi}{dk} \right]}{b_2 \zeta - \frac{y + y_0}{t} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + iv} d\zeta, \end{aligned} \quad (84)$$

в котором  $f = b_2 t \zeta - (y + y_0) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + ivt$ , а  $x = vt$  обозначает координату движущегося наблюдателя.

Если скорость  $v$  движения наблюдателя удовлетворяет неравенству  $0 < v < a_2$ , то выражение

$$b_2 \zeta - \frac{y + y_0}{t} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} + iv,$$

стоящее в знаменателях подинтегральных функций, может обращаться в нуль (и притом лишь первого порядка) только в точке  $\zeta = -i$ .<sup>1</sup> Но в точке  $\zeta = -i$  обращаются в нуль числи-

<sup>1</sup> Это возможно только при  $v = b_2$  и  $t \rightarrow \infty$ .

тели интегралов по  $\zeta$ . Поэтому простая оценка по модулю позволяет убедиться в том, что интегралы формул (84) являются ограниченными. Вследствие же этого можно утверждать, что результат подстановки в (19<sub>1</sub>) интеграла (82), распространенного по контурам  $(l_1^+ + l_1^-)$ , убывает с возрастанием времени не медленнее чем  $t^{-1}$ .

Нам остается еще рассмотреть интеграл (82), распространенный по контуру  $(l_2^+ + l_2^-)$ . Рассмотрение упомянутого интеграла упрощается вследствие того обстоятельства, что подинтегральная функция в (82) во всех точках контура  $(l_2^+ + l_2^-)$  содержит экспоненциально убывающие множители  $e^{kf}$ . Рассуждение, подобное предыдущему, показывает, что результат подстановки в (19<sub>1</sub>) интеграла (82), распространенного по контурам  $(l_2^+ + l_2^-)$ , убывает с течением времени не медленнее чем  $t^{-1}$ .

20. Исследование релейевских интегралов (31) и (31<sub>1</sub>) можно было бы производить различными путями и, в частности, можно было бы пытаться вычислить эти интегралы сколь угодно точно. Мы же в настоящей работе ставили себе целью получение сравнительно грубых приближенных формул, определяющих лишь основные черты явлений. С такой точки зрения и следует подходить к исследованиям, помещенным в п.п. 9 и 10.

В дополнение к сказанному заметим, что формула (35) без пренебрежений записывается следующим образом:

$$k_1 = \frac{1}{2H\sqrt{1-\delta^2\tau_0^2}} \log \left[ \frac{2Nb_2 p_0 t}{\pi g_0} \right] + \frac{\log k_1}{2H\sqrt{1-\delta^2\tau_0^2}}.$$

Если  $b_2 p_0 t g_0^{-1}$  очень велико, то первое слагаемое оказывается значительно больше второго. Поэтому для приближенных оценок можно пренебрегать вторым слагаемым предыдущей формулы. Заметим, кстати, что при чрезвычайно больших значениях времени можно было бы отбросить в (35<sub>1</sub>) и множитель  $N$  под знаком логарифма. Это привело бы нас к формулам, не зависящим от „произвола“ в выборе числа  $N$ . Совершенно так же, при очень больших значениях времени можно было бы отбросить множитель  $N$  и в формуле (37<sub>1</sub>).

21. Для выяснения зависимости функции  $\varphi = kb_2 \tau_1^0$  ( $k$ ) от числа  $k$  можно было бы основываться на аналитическом

изучении уравнения (23<sub>1</sub>). Хотя такое изучение не встречает принципиальных затруднений, но оно оказывается весьма громоздким. Поэтому проще пользоваться графическими приемами, для чего можно поступать следующим образом.

При определенных значениях постоянных  $p$ ,  $\delta$  и  $\gamma$  следует задать последовательность чисел  $\tau = \tau_1^0$ , вычислить по ним значения правых частей (23<sub>1</sub>) и по таблицам определить соответствующие значения чисел  $k$ . Такого рода вычисления приводят при „любых“ значениях постоянных  $p$ ,  $\delta$  и  $\gamma$  к зависимости  $\varphi(k)$ , изображенной на рис. 3.

#### § 4. Заключение

22. Резюмируем коротко полученные результаты. Нами было показано, что если из потенциалов (16), (17) выделить „статическое“ слагаемое  $\varphi^0$  [сокращающееся с подобным же слагаемым  $\psi^0$  потенциала (16<sub>1</sub>), (17<sub>1</sub>) при переходе к полю смещений] и если рассматривать разность  $\varphi - \varphi^0$  из формулы (30), то движущийся по закону  $x = vt$  наблюдатель установит следующую картину поведения возмущения при больших значениях времени  $t$ :

Он будет констатировать в моменты времени  $t_q$ , определяющиеся из уравнений (49) и (49<sub>1</sub>) при  $t = t_q$ , а также из уравнения

$$\xi_q = \sqrt{t_1^2 a_2^2 - (y + y_0)^2} + \sqrt{t_2^2 a_1^2 - (2qH)^2} - vt_q = 0, \quad (61_1)$$

приход фронтов повторных волн  $\varphi_\lambda^{(q)}(x, y, t)$ , испытавших различное число отражений от свободной поверхности жидкости. На фронтах  $\xi_q = 0$  возмущение окажется бесконечно большим, а в некоторой окрестности позади фронтов оно будет представляться формулой (62).

Исключая из рассмотрения промежутки времени  $(t_q - \varepsilon, t_q + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$  — любое малое число, и оценивая величину возмущения  $\varphi - \varphi^0$  из (30), движущийся наблюдатель будет считать, что если скорость  $v$  движения удовлетворяет неравенствам  $v < c_0$  или  $v > c_2$  (в которых величины  $c_0, c_2$ , равно как и встречающаяся далее величина  $c$ , были определены в п. 10), то возмущение (30) убывает, как  $t^{-\alpha}$ , при  $\alpha < 1$ . Если  $c_0 < v < c$  или  $c < v < c_2$ , то (30)  $\ddot{y}$ бывает,

как  $t^{-\frac{1}{2}}$ . Если  $v = c_0$ , то (30) убывает, как  $t^{-\frac{1}{3}}$  и, наконец, если  $v = c$ , то возмущение (30) при больших значениях  $(y + y_0)$  убывает, как  $t^{-\frac{1}{2}}$ , а при малых  $(y + y_0)$  убывает медленнее, согласно формуле (37). При  $y = y_0 = 0$  и  $v = c$  возмущение (30) не убывает вовсе.

Следует отметить, что не все перечисленные результаты движущийся наблюдатель должен считать равноценными с физической точки зрения. Действительно, что касается прохождения мимо наблюдателя фронтов повторных волн, или же (в случае малых значений  $y$  и  $y_0$ ) прохождения волны Релея (34) и (34<sub>1</sub>), то величина и характер возмущения, связанного с такими волнами, легко могут быть определены экспериментально вследствие наличия резких неоднородностей в исследуемом поле функции  $\varphi$ . Поэтому предсказания теории относительно поведения упомянутых волн проверяются на опыте и представляют определенную ценность. Напротив того, все прочие предсказания теории (перечисленные ранее) были получены нами в результате рассмотрения возмущений, всюду непрерывных и „взмещающихся медленно“. Подобного рода возмущения, как, например, первые слагаемые в формулах (31), не имеют резких экстремумов, наличие которых могло бы заставить „сработать“ измерительный сейсмический прибор. Поэтому не ясно, в какой мере упомянутые предсказания теории обнаруживаются на практике.

Высказанные соображения мы могли бы еще усугубить, если бы учли явным образом ту, далеко идущую идеализацию реальных физических условий, которая привела нас к математической задаче из п. 2.

Но если отвлечься от практической значимости тех или иных наших выводов и перейти к обсуждению общих результатов исследования решения математической задачи из п. 2, то следовало бы отметить ряд обстоятельств, связанных с распространением релеевского возмущения, существенно отличающих нашу динамическую систему от упругого полупространства.

В задачах об упругом полупространстве можно было характеризовать релеевскую волну следующими двумя признаками: во-первых, тем, что поверхностный разрыв, связанный с релеевской волной, распространяется с определенной скоростью  $v = c_R$ , во-вторых, — аномально медленным убыванием возмущения, регистрируемого наблюдателем, движущимся вдоль поверхности полупространства

со строго определенной скоростью  $v = c_R$ . Теперь же мы встречаемся с совершенно другим положением дела.

Мы видели, что в задаче об упругом полупространстве и слое жидкости релеевское возмущение [представляемое интегралами (39)] обладает первым свойством волны Релея в полупространстве, но не обладает свойством вторым. Вместо одной скорости  $v = c$  движения наблюдателя теперь появляется целая полоса скоростей  $c_0 \leq v \leq c_2$ ,<sup>1</sup> соответствующая аномально медленному закону убывания возмущения, регистрируемого движущимся наблюдателем. Заметим, что такого рода „эффект полосы“ имеет место и в других динамических задачах теории упругости. Мы встречались с этим эффектом и в задаче о колебаниях плоского упругого слоя<sup>(4)</sup>, и в задачах о колебаниях шара и круглого цилиндра и, наконец, в задаче о распространении поверхностных волн вдоль цилиндрического выреза в безграничном упругом пространстве. Последняя задача, рассмотренная аспирантом Ленинградского государственного университета Г. И. Марчуком, интересна в том отношении, что появление релеевской полосы скоростей в ней не связано с наложением „отраженных возмущений“ (которые там попросту отсутствуют), а является лишь следствием влияния кривизны граничной поверхности на распространяющееся возмущение. Что же касается релеевской полосы в задаче об упругом полупространстве и слое жидкости, то причиной ее появления следует считать сложный процесс наложения отраженных в слое жидкости возмущений. При этом естественно мог бы возникнуть вопрос о механизме такого наложения. Ответ на такой вопрос должен был бы давать объяснение качественной картины явлений, происходящих в нашей динамической системе, на основании фактов, известных из исследования процессов на плоских границах раздела двух сред. Но наши попытки разрешить такую проблему окончились безрезультатно хотя бы потому, что нам не удалось объяснить (при помощи упоминавшихся фактов) полную независимость верхней границы  $c_2$  релеевской полосы скоростей от свойств жидкости. Вследствие этого мы склонны думать, что элементарное объяснение „причин“ появления релеевской полосы едва ли возможно. Что же касается нижней границы  $c_0$  полосы скоростей (которая, кстати говоря, равна нулю в некоторых задачах из упоминавшихся), то ее происхождение естественно пытаться связать с явлением полного внутреннего отражения волн, распространяющихся

<sup>1</sup> На существование которой впервые указал Н. В. Зволинский.

в слое жидкости. На этом вопросе мы не будем подробно останавливаться, равно как не будем останавливаться на обсуждении зависимости наблюдаемых в системе явлений от толщины  $H$  слоя жидкости.

В заключение работы полезно было бы остановиться на сравнении нашего метода исследования возмущения  $\varphi — \varphi^0$  с методом, принятым в работах Н. В. Зволинского<sup>[3]</sup>. Такое сравнение могло бы быть выполнено шаг за шагом, и оно, по видимому, позволяет считать, что достигнутые нами упрощения есть прямое следствие взятой за исходную формы решения задачи в виде двукратных интегралов (16) и (17). Удобство такой формы решения по сравнению с решением (15), положенным в основу исследований Н. В. Зволинского<sup>[3]</sup>, как нам кажется, заключается в том, что в интеграле (17) подинтегральная функция содержит „быстро изменяющиеся“ множители, наличие которых облегчает выполнение оценок этого интеграла. В формулах же (15) все множители изменяются одинаково медленно, что должно неблагоприятно отражаться на выполнении оценок и, по видимому, затрудняет получение количественных следствий.

Нам остается еще сделать лишь одно замечание исторического характера. Настоящая работа была закончена в своей первой редакции в мае 1950 г. и была послана для ознакомления Н. В. Зволинскому. Последний сделал ряд критических замечаний и указал на некоторое число мест в работе, трудно понимаемых без соответствующих доказательств (опущенных в §§ 1 и 2). Справедливость критики Н. В. Зволинского побудила нас несколько изменить изложение некоторых разделов работы, а также побудила написать дополнительный к основному тексту параграф (§ 3). В результате, наше изложение стало, вероятно, более понятным, но в нем, конечно, остались вопросы, о которых, быть может, следовало бы писать более подробно и обстоятельно.

Мы считаем приятным долгом выразить признательность Н. В. Зволинскому за просмотр рукописи.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. В. Зволинский. ДАН СССР, т. LVI, № 1, 1947.
- [2] Н. В. Зволинский. ДАН СССР, т. LIX, № 6, 1948.
- [3] Н. В. Зволинский. ДАН СССР, т. LXV, № 2, 1949.
- [4] Г. И. Петрашень, Г. И. Марчук, К. И. Огурцов. Уч. зап. ЛГУ, № 35, вып. 21, 1950.
- [5] Д. И. Шерман. Труды Сейсмолог. инст. АН СССР, № 115, 1945.
- [6] В. Д. Купрадзе и С. Л. Соболев. Труды Сейсмолог. инст. АН СССР, № 10, 1930.

## К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛАСТИН

*Г. И. Петрашень*

При выводе уравнений колебания тонких пластин делают некоторые предположения о характере деформаций, возникающих в пластине под действием динамической нагрузки. Упомянутые предположения формулируются обычно без точного указания внешних условий, при которых они соответствуют действительному состоянию деформации пластины, и без указания границ, вне которых они перестают быть правильными. Поэтому, при всей своей естественности, исходные положения теории тонких пластин<sup>1</sup> не могут считаться строго обоснованными и должны рассматриваться лишь как рабочая гипотеза, справедливость которой (равно как и границы применимости) устанавливается путем экспериментов. Подобное состояние теории тонких пластин едва ли можно считать удовлетворительным.

Вследствие сказанного представляется естественным попытаться вывести уравнения колебания тонких пластин из строгого решения динамической задачи для упругого бесконечного слоя, ограниченного параллельными плоскостями. Если бы удалось это сделать, то мы могли бы рассчитывать не только дать подтверждение упоминавшимся (известным) предположениям теории тонких пластин, но и указать естественные границы их применимости. Подобный результат, несомненно, представлял бы практический интерес.

В предлагаемой работе дается вывод уравнений теории тонких пластин на основании исследования решения задач динамической теории упругости для плоского слоя. Сначала строятся точные решения некоторых задач, а затем производится исследование построенных решений. В результате исследований получается строгое обоснование уравнений колебания тонких пластин и устанавливаются границы применимости этих уравнений.

<sup>1</sup> Обсуждаемые в § 8.

### § 1. Колебания упругого слоя под действием плоской поверхностной силы

1. Пусть граничная поверхность  $z = h$  изотропного упругого слоя, находящегося в покое при  $t < 0$ , остается свободной от напряжений, а на границу  $z = 0$  (в момент времени  $t = 0$ ) начинает действовать напряжение, не зависящее от переменной  $y$  декартовой системы координат.

Если ввести скалярный и векторный потенциалы  $\varphi(x, z, t)$  и  $\psi(x, z, t)$ , посредством которых вектор упругих смещений представляется в виде

$$\vec{u} = u \vec{i} + w \vec{k}, \quad (1,1)$$

где

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2,1)$$

то динамическая задача для слоя  $0 \leq z \leq h$  сведется к построению решений волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (3,1)$$

при нулевых начальных данных

$$\varphi \Big|_{t=0} = \psi \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (4,1)$$

и следующих условиях на границе области:

$$T_{xz} \equiv \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=h} = 0;$$

$$T_{zz} \equiv \left\{ \lambda \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right\} \Big|_{z=h} = 0, \quad (5,1)$$

$$T_{xz} \Big|_{z=0} = -F_1(x, t); \quad T_{zz} \Big|_{z=0} = -F_2(x, t). \quad (6,1)$$

Постоянные  $a^2$  и  $b^2$  в (3,1) имеют значения квадратов обратных скоростей

$$a^2 = \frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu}; \quad b^2 = \frac{\rho_0}{\mu}, \quad (7,1)$$

функции же  $F_\nu(x, t)$  в правых частях (6,1) предполагаются заданными.

Мы построим решение поставленной задачи в предположении, что граничные функции  $F_\nu(x, t)$  представимы в виде следующих интегралов:

$$\left. \begin{aligned} F_2(x, t) &= \int_0^{k_1} \tau_2(\tau, k) \cos kx dk; \\ F_1(x, t) &= \int_0^{k_1} \tau_1(t, k) \sin kx dk, \end{aligned} \right\} (8,1)$$

в которых  $k_1 > 0$  имеет конечное или бесконечное значение, а  $\tau_\nu(t, k)$  — либо являются функциями ограниченной вариации, обращающимися в нуль вне промежутка  $0 \leq t \leq T_0$ , или же являются такими, что функции  $f_\nu(s, k)$  из (14,1) при стремлении  $s$  к бесконечности в правой полуплоскости убывают не медленнее  $|s|^{-1}$ .

2. Будем искать потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  в виде интегралов

$$\varphi = \int_0^{k_1} R(z, t, k) \cos kx dk; \quad \psi = \int_0^{k_1} S(z, t, k) \sin kx dk. \quad (9,1)$$

Предполагая возможность двукратного дифференцирования под знаками интегралов (что мы сможем проверить далее), подставим (9,1) в (3,1) — (6,1). Тогда получим для функций  $R$  и  $S$  следующую предельную задачу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} &= k^2 R, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - b^2 \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} &= k^2 S; \end{aligned} \right\} (10,1)$$

$$R = S = \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0; \quad (11,1)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[ 2k \frac{\partial R}{\partial z} + k^2 S + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=h} &= 0, \\ \left\{ -\lambda k^2 R + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + 2\mu k \frac{\partial S}{\partial z} \right\} \Big|_{z=h} &= 0; \end{aligned} \right\} (12,1)$$

$$\left. \begin{aligned} -\mu \left[ 2k \frac{\partial R}{\partial z} + k^2 S + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=0} &= -\tau_1(t, k); \\ \left\{ -\lambda k^2 R + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + 2\mu k \frac{\partial S}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} &= -\tau_2(t, k), \end{aligned} \right\} (13,1)$$

которую удобно решать методом одностороннего преобразования Лапласа.

Для проведения этого метода обозначим:

$$f_v(s, k) = \int_0^{\infty} e^{-st} \tau_v(t, k) dt; \quad (14,1)$$

$$\left. \begin{aligned} X_0(z, s, k) &= \int_0^{\infty} e^{-st} R(z, t, k) dt; \\ Y_0(z, s, k) &= \int_0^{\infty} e^{-st} S(z, t, k) dt, \end{aligned} \right\} (15,1)$$

и преобразуем уравнения (10,1) и условия (12,1) и (13,1) на комплексную плоскость  $s$ . Тогда получим граничную задачу для обыкновенных уравнений

$$X_0'' - (a^2 s^2 + k^2) X_0 = 0; \quad Y_0'' - (b^2 s^2 + k^2) Y_0 = 0, \quad (16,1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \left[ 2k \frac{\partial X_0}{\partial z} + k^2 Y_0 + \frac{\partial^2 Y_0}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=h} &= 0; \\ \left\{ -\lambda k^2 X_0 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 X_0}{\partial z^2} + 2\mu k \frac{\partial Y_0}{\partial z} \right\} \Big|_{z=h} &= 0; \\ \mu \left[ 2k \frac{\partial X_0}{\partial z} + k^2 Y_0 + \frac{\partial^2 Y_0}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=0} &= f_1(s, k); \\ \left\{ -\lambda k^2 X_0 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 X_0}{\partial z^2} + 2\mu k \frac{\partial Y_0}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} &= -f_2(s, k). \end{aligned} \right\} (17,1)$$

Решение такой задачи дается формулами

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \gamma \operatorname{sh} [(h-z) \sqrt{a^2 s^2 + k^2}] + \delta \operatorname{ch} [(h-z) \sqrt{a^2 s^2 + k^2}], \\ Y_0 &= \alpha \operatorname{sh} [(h-z) \sqrt{b^2 s^2 + k^2}] + \beta \operatorname{ch} [(h-z) \sqrt{b^2 s^2 + k^2}], \end{aligned} \right\} (18,1)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{(2k^2 + b^2s^2) Df_1(s, k) - k^2 Bf_2(s, k)}{\mu k^4 (AD + BC)}; \\ \beta &= \frac{(2k^2 + b^2s^2) Cf_1(s, k) + k^2 Af_2(s, k)}{\mu k^4 (AD + BC)}; \\ \gamma &= \frac{2k^2 + b^2s^2}{2k \sqrt{a^2s^2 + k^2}} \beta; \quad \delta = \frac{2k \sqrt{b^2s^2 + k^2}}{2k^2 + b^2s^2} \alpha, \end{aligned} \right\} (19,1)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} k^4 A &= (b^2s^2 + 2k^2)^2 \operatorname{sh}(h \sqrt{b^2s^2 + k^2}) - \\ &- 4k^2 \sqrt{a^2s^2 + k^2} \sqrt{b^2s^2 + k^2} \operatorname{sh}(h \sqrt{a^2s^2 + k^2}); \\ k^4 B &= (b^2s^2 + 2k^2)^2 [\operatorname{ch}(h \sqrt{b^2s^2 + k^2}) - \\ &- \operatorname{ch}(h \sqrt{a^2s^2 + k^2})]; \\ k^2 C &= 2k \sqrt{b^2s^2 + k^2} [\operatorname{ch}(h \sqrt{a^2s^2 + k^2}) - \\ &- \operatorname{ch}(h \sqrt{b^2s^2 + k^2})]; \\ k^2 D &= \frac{-1}{2k \sqrt{a^2s^2 + k^2}} [(b^2s^2 + 2k^2)^2 \operatorname{sh}(h \sqrt{a^2s^2 + k^2}) - \\ &- 4k^2 \sqrt{a^2s^2 + k^2} \sqrt{b^2s^2 + k^2} \operatorname{sh}(h \sqrt{b^2s^2 + k^2})]. \end{aligned} \right\} (20,1)$$

Обращение же формул (15,1) дает для функций  $R$  и  $S$  следующие интегральные представления:

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_0(z, s, k) e^{st} ds, \\ S &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_0(z, s, k) e^{st} ds. \end{aligned} \right\} (21,1)$$

Теперь остается лишь проверить, удовлетворяют ли функции (21,1) всем условиям задачи (10,1) — (13,1). Для проверки заметим, что, при сделанных относительно функций  $\tau_1(t, k)$  предположениях, функции (14,1) убывают не медленнее  $|s|^{-1}$  при  $s \rightarrow \sigma \pm i\infty$  (в правой полуплоскости); коэффициенты же (19,1) убывают при  $s \rightarrow \sigma \pm i\infty$  не медленнее  $|s|^{-2}$ .

Таким образом, оказывается, что интегралы (21,1), равно как и интегралы, получающиеся в результате однократного дифференцирования подинтегральных функций, сходятся абсолютно и равномерно относительно переменных  $t$ ,  $z$  и  $k$ . Из равномерной же относительно  $t$  сходимости следует, что функции (21,1) действительно удовлетворяют нулевым начальным данным (11,1).

Что же касается вторых производных функций (21,1), то не представляло бы труда убедиться в том, что эти производные также можно вычислять дифференцированием под знаками интегралов. Но интегралы для  $R''$  и  $S''$ , вообще говоря, уже не будут равномерно сходящимися при всех значениях  $t$ ,  $z$  и  $k$  (вследствие чего  $R''$  и  $S''$  могут иметь разрывы непрерывности первого рода). Доказательство высказанных утверждений можно было бы произвести на основании простого тождественного преобразования подинтегральных функций в (21,1). Но вследствие некоторой громоздкости упомянутого преобразования мы не будем следовать такому пути, а поведем доказательство интересующего нас предложения исходя из класса „достаточно гладких“ функций  $\tau_v(t, k)$ .

Рассмотрим последовательность граничных функций  $\tau_v^{(n)}(t, k)$ , стремящуюся к функциям  $\tau_v(t, k)$  и такую, что функции

$$f_v^{(n)}(s, k) = \int_0^{\infty} e^{-st} \tau_v^{(n)}(t, k) dt \quad (14,1)$$

убывают при  $s \rightarrow \sigma \pm i\infty$  не медленнее  $|s|^{-1-\alpha_n}$ , где числа  $\alpha_n > 0$  стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда функции  $R^{(n)}$  и  $S^{(n)}$  из (21,1), отвечающие граничным функциям  $\tau_v^{(n)}(t, k)$ , оказываются непрерывными вместе со вторыми производными, причем (в силу абсолютной сходимости) ясно, что упомянутые производные можно вычислять дифференцированием под знаками интегралов. Вычисляя же производные, мы легко убеждаемся в том, что функции  $R^{(n)}$  и  $S^{(n)}$  действительно удовлетворяют всем условиям задачи (10,1) — (13,1) при граничных функциях  $\tau_v^{(n)}(t, k)$ . Будем теперь устремлять  $n \rightarrow \infty$ . Тогда функции  $R^{(n)}$  и  $S^{(n)}$  вместе со своими первыми производными будут равномерно стремиться к  $R$  и  $S$  из (21,1) и к их первым производным. Но равномерной сходимости последовательности функций и их первых производных вполне достаточно для того, чтобы утверждать,

что предельные функции (21,1) действительно являются решениями задачи (10,1) — (13,1).

Итак, мы доказали, что формулы (21,1) дают правильное решение задачи для функций  $R$  и  $S$  из (9,1). Нам остается лишь обсудить вопрос о законности перехода от задачи для потенциалов  $\varphi$  и  $\psi$  к предельной задаче для функций  $R$  и  $S$ . Такой переход безусловно законен, если формулы (9,1) допускают двукратное дифференцирование под знаками интегралов. Так, например, и будет в случае конечного значения верхнего предела интегрирования  $k_1$ . В случае же бесконечного значения числа  $k_1$  следовало бы проводить дополнительные исследования, устанавливающие закон убывания функций  $R$  и  $S$  при  $k \rightarrow \infty$ . Такие исследования не представляло бы труда выполнить и они показывают, что все предыдущие операции действительно были законными даже и в том случае, если  $k_1 = \infty$ <sup>[1]</sup>. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, так как во всем нижеследующем нам придется считать  $k_1 < \infty$ .

3. Построенное в предыдущем пункте решение (9,1), (21,1) нашей задачи удобно представить в несколько ином виде. Для этой цели перейдем в интегралах (21,1) к новой переменной интегрирования

$$\zeta = \frac{b}{k} s \quad (22,1)$$

и введем следующее обозначение:

$$\gamma = \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}}. \quad (23,1)$$

Тогда вместо (20,1) получим формулы

$$\left. \begin{aligned} A &= (2 + \zeta^2)^2 \operatorname{sh}(kh\sqrt{1 + \zeta^2}) - \\ &\quad - 4\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \operatorname{sh}(kh\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}); \\ B &= (2 + \zeta^2)^2 [\operatorname{ch}(kh\sqrt{1 + \zeta^2}) - \operatorname{ch}(kh\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2})], \\ C &= 2\sqrt{1 + \zeta^2} [\operatorname{ch}(kh\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}) - \operatorname{ch}(kh\sqrt{1 + \zeta^2})], \\ D &= \frac{-1}{2\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}} [(2 + \zeta^2)^2 \operatorname{sh}(kh\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}) - \\ &\quad - 4\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \operatorname{sh}(kh\sqrt{1 + \zeta^2})]. \end{aligned} \right\} (24,1)$$

Для определителя  $AD + BC$  получим следующее значение:

$$AD + BC = \sqrt{1 + \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta),$$

где

$$\Delta_0(k, \zeta) = \frac{-1}{2\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}} \times \left\{ \begin{aligned} & \times \{ [(2 + \zeta^2)^4 + 16(1 + \zeta^2)(1 + \\ & + \gamma^2 \zeta^2)] \operatorname{sh}(kh \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}) \operatorname{sh}(kh \sqrt{1 + \zeta^2}) + \\ & + 8(2 + \zeta^2)^2 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} [1 - \\ & - \operatorname{ch}(kh \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}) \operatorname{ch}(kh \sqrt{1 + \zeta^2})] \} \}. \end{aligned} \right. \quad (25,1)$$

И, наконец, функции  $R(z, t, k)$  и  $S(z, t, k)$  из (21,1) представим следующими окончательными выражениями:

$$R = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\Phi_1(z, k, \zeta) f_1\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right) + \Phi_2(z, k, \zeta) f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{\mu b k 2\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} \times \left\{ \begin{aligned} & \times e^{\frac{k}{b} \frac{t}{\zeta}} d\zeta; \\ S = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{\Phi_3(z, k, \zeta) f_1\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right) + \Phi_4(z, k, \zeta) f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{\mu b k 2\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} \times \\ & \times e^{\frac{k}{b} \frac{t}{\zeta}} d\zeta, \end{aligned} \right. \quad (26,1)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= (2 + \zeta^2)^2 C \operatorname{sh}[(h - z) k \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}] + \\ & + 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} D \operatorname{ch}[(h - z) k \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]; \\ \Phi_2 &= (2 + \zeta^2) A \operatorname{sh}[(h - z) k \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}] - \\ & - \frac{4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}{2 + \zeta^2} B \operatorname{ch}[(h - z) k \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}]; \\ \Phi_3 &= 2(2 + \zeta^2) \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \{ D \operatorname{sh}[(h - z) k \sqrt{1 + \zeta^2}] + \\ & + C \operatorname{ch}[(h - z) k \sqrt{1 + \zeta^2}] \}; \\ \Phi_4 &= 2 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \{ A \operatorname{ch}[(h - z) k \sqrt{1 + \zeta^2}] - \\ & - B \operatorname{sh}[(h - z) k \sqrt{1 + \zeta^2}] \}. \end{aligned} \right\} \quad (27,1)$$

Итак, решение динамической задачи (3,1)—(6,1) для упругого слоя при граничных воздействиях (8,1) представляется формулами (9,1), в которых подинтегральные функции  $R$  и  $S$  имеют значения (26,1).

4. В нижеследующем основную роль будет играть случай нормального воздействия на одну из граничных плоскостей слоя при свободной второй границе. В таком случае функции  $F_1(x, t)$  и  $f_1(s, k)$  из (8,1) и (14,1) оказываются равными нулю, вследствие чего решение граничной задачи (3,1)—(6,1) представится формулами (9,1), в которых  $R(z, t, k)$  и  $S(z, t, k)$  имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 R(z, t, k) &= \\
 &= \frac{1}{\mu b k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Phi_2(z, k, \zeta) f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} e^{k \frac{t}{b}} d\zeta; \\
 S(z, t, k) &= \\
 &= \frac{1}{\mu b k} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Phi_4(z, k, \zeta) f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta. \quad (28,1)
 \end{aligned}$$

В дальнейшем мы убедимся в том, что предположение о независимости граничного воздействия (8,1) от переменной  $y$ , приведшее нас к формулам (9,1) и (28,1), не отражается на общности вытекающих из последних формул физических следствий. Поэтому мы сможем производить исследования точного решения задачи об упругом слое на примере формул (9,1) и (28,1), а все полученные результаты исследований сможем распространять на общий случай распределения сил, приложенных к элементам упругого слоя.

## § 2. Колебания упругого слоя под действием равномерно распределенной по сечению нормальной силы

При формулировке основных предположений о характере деформаций в „тонких“ пластинах (на которых базируется обычный „вывод“ приближенных уравнений движения) иногда утверждают, что условием справедливости таких предположений является равномерность распределения внешнего (нормального) воздействия по нормальному сечению пластины. Не обсуждая вопроса о том, каким образом подоб-

ная равномерность распределения осуществляется на практике, постараемся выяснить, имеются ли какие-нибудь основания для приведенного утверждения. Чтобы это сделать, найдем строгое решение задачи о колебаниях упругого слоя под действием плоской нормальной силы, равномерно распределенной по сечению слоя, а затем построенное решение подвергнем исследованию.

1. Рассмотрим предварительно вспомогательную задачу о колебаниях безграничной упругой среды, под действием силы  $\vec{F}_0 = F_0(x, t) \vec{k}_1$ , приложенной к точкам плоскости  $z = z_0$ . Будем предполагать, что поверхностная плотность силы  $F_0(x, t)$  определяется интегралом

$$F_0(x, t) = \int_0^{k_1} \tau(t, k) \cos kx dk, \quad (1,2)$$

в котором функция  $\tau(t, k)$  подчинена таким же условиям, как и функции  $\tau_v(t, k)$  из (8,1).

Разделим (мысленно) безграничную среду на два полупространства: первое полупространство  $z > z_0$  и полупространство второе  $z < z_0$ . Будем характеризовать поле упругих смещений в первом полупространстве потенциалами  $\varphi_1(x, z, t; z_0)$ ,  $\psi_1(x, z, t; z_0)$ , а во втором полупространстве потенциалы обозначим:  $\varphi_2(x, z, t; z_0)$  и  $\psi_2(x, z, t; z_0)$ . Тогда задача о колебаниях безграничной среды под действием силы (1,2) сведется к построению решений волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi_v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial z^2} = b^2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial t^2}, \quad (2,2)$$

в которых  $a^2$  и  $b^2$  имеют значения (7,1), при нулевых начальных данных<sup>1</sup>

$$\varphi_v \Big|_{t=0} = \psi_v \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_v}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_v}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (3,2)$$

и следующих условиях на поверхности раздела  $z = z_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}; \end{aligned} \right\} \quad (4,2)$$

<sup>1</sup> Очевидно, что при  $v = 1$  равенства (3,2) должны иметь место в точках, где  $z > z_0$ , а при  $v = 2$  они должны выполняться в точках  $z < z_0$ .

$$\left. \begin{aligned} \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 (\psi_1 - \psi_2)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (\psi_1 - \psi_2)}{\partial z^2} \right] &= 0, \\ \lambda \left[ \frac{\partial^2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial z^2} \right] &+ \\ + 2\mu \left[ \frac{\partial^2 (\varphi_1 - \varphi_2)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 (\psi_1 - \psi_2)}{\partial x \partial z} \right] &= -F_0(x, t). \end{aligned} \right\} (5,2)$$

Заметим, что условие (4,2) выражает требование непрерывности смещений на поверхности раздела, а условие (5,2) выражает требование равновесия всех сил, приложенных к элементам упомянутой поверхности.

Решение поставленной задачи будем искать в виде интегралов Фурье

$$\varphi_y = \int_0^{k_1} R_y \cos kx dk; \quad \psi_y = \int_0^{k_1} S_y \sin kx dk. \quad (6,2)$$

Вычисляя производные (6,2) и подставляя их значения в (2,2), получаем для  $R_y$  и  $S_y$  уравнения вида (10,1), решения которых с учетом начальных данных (3,2) удобно строить при помощи одностороннего преобразования Лапласа. Аналогично тому, как это делалось в § 1, нетрудно убедиться<sup>[1]</sup>, что функции  $R_y$  и  $S_y$  могут быть представлены интегралами

$$\left. \begin{aligned} R_y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_y(z, k, \zeta; z_0) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \\ S_y &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y_y(z, k, \zeta; z_0) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \end{aligned} \right\} (7,2)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= a_1 e^{-(z-z_0)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}, \\ Y_1 &= b_1 e^{-(z-z_0)k\sqrt{1+\zeta^2}}; \end{aligned} \right\} (8,2)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= a_2 e^{(z-z_0)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}, \\ Y_2 &= b_2 e^{(z-z_0)k\sqrt{1+\zeta^2}}, \end{aligned} \right\} (9,2)$$

при условии, что ветви многозначных функций определены равенствами:  $\arg \sqrt{1+\zeta^2} = \arg \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} = 0$  при  $\zeta > 0$ , а величина  $\gamma$  определяется по (23,1).

Для нахождения постоянных  $a_1$  и  $b_1$  подставим (6,2) и (7,2) в соотношения (4,2) и (5,2) на границе раздела. Вводя обозначение

$$f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right) = \int_0^{\infty} e^{-k\frac{t}{b}\zeta} \tau(t, k) dt, \quad (10,2)$$

мы без труда получаем для искомым постоянных систему уравнений

$$a_1 - a_2 = \sqrt{1 + \zeta^2} (b_1 + b_2);$$

$$\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} (a_1 + a_2) = b_1 - b_2;$$

$$2\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} (a_1 + a_2) = (2 + \zeta^2) (b_1 - b_2);$$

$$(2 + \zeta^2) (a_1 - a_2) - 2\sqrt{1 + \zeta^2} (b_1 + b_2) = \frac{-1}{\mu kb} f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right),$$

решение которой дается формулами

$$\left. \begin{aligned} a_1 = -a_2 &= -\frac{f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2\mu kb \zeta^2}, \\ b_1 = b_2 &= -\frac{f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2\mu kb \zeta^2 \sqrt{1 + \zeta^2}}. \end{aligned} \right\} (11,2)$$

Таким образом, решение задачи (2,2) — (5,2) определяется формулами (6,2) и (7,2) при условии, что функции  $X_1$  и  $Y_1$  имеют значения из (8,2), (9,2) и (11,2). Аналогично тому, как это делалось в § 1, не представляет труда убедиться, что построенное решение является правильным, удовлетворяющим всем условиям задачи.

2. Предположим теперь, что выполняется неравенство  $0 \leq z_0 \leq h$  и что во всем пространстве между плоскостями  $z = 0$  и  $z = h$  задано равномерное распределение нормальной (к плоскостям  $z = \text{const}$ ) силы, плотность которой по отношению к переменным  $z$  и  $x$  определяется формулой (1,2). Тогда естественно ожидать, что поле смещений, созданное действием распределенной силы, представится как результат интегрирования по  $z_0$  (в пределах  $0 \leq z_0 \leq h$ ) смещений, созданных действием силы (1,2), заданной при  $z = z_0$ .

[Заметим, что объемная сила, соответствующая поверхностной силе (1,2), представляется формулой  $F_0(x, t) \delta(z - z_0)$ , где  $\delta(z - z_0)$  — символ Дирака.]

Мы будем рассматривать точки пространства, для которых  $0 \leq z \leq h$ . В таких точках поле смещений  $\vec{u}_0$ , соответствующее распределенной силе, представится следующей формулой:<sup>1</sup>

$$\vec{u}_0 = \int_0^z \vec{u}_1(x, z, t; z_0) dz_0 + \int_z^h \vec{u}_2(x, z, t; z_0) dz_0. \quad (12,2)$$

Простым дифференцированием без труда можно проверить, что функция  $\vec{u}_0(x, z, t)$  из (12,2) удовлетворяет уравнению Лямэ

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u}_0 + \mu \Delta \vec{u}_0 + \vec{F}_0 = \rho \frac{d^2 \vec{u}_0}{dt^2}, \quad (13,2)$$

в котором объемная плотность силы  $\vec{F}_0 = F_0(x, t) \vec{k}_1$  имеет значение (1,2).

Еще проще убедиться в том, что эта функция удовлетворяет нулевым начальным данным. Мы не будем останавливаться на выкладках, необходимых для проведения упомянутых проверок, так как они представляются вполне очевидными. Полезно лишь заметить, что при проверке справедливости (13,2) существенно приходится пользоваться соотношениями (4,2) и (5,2), но записанными не в потенциа-

лах, а в компонентах векторов упругих смещений  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ . Что же касается поля во всем безграничном в пространстве, то легко можно было бы убедиться в том, что в областях  $z > h$  и  $z < h$  (где массовые силы отсутствуют) поле сме-

щений  $\vec{u}_0$  представляется лишь одним интегралом по  $z_0$ , взятым в пределах  $(0, h)$ , и содержащим, соответственно,

функцию  $\vec{u}_1(x, z, t; z_0)$  или же функцию  $\vec{u}_2(x, z, t; z_0)$ .

Определенное формулой (12,2) (и подобными же формулами для областей  $z > h$  и  $z < h$ ) поле  $\vec{u}_0(x, z, t)$  удовлетворяет всем требованиям, необходимым для того, чтобы

<sup>1</sup> В этой формуле  $\vec{u}_i(x, z, t; z_0)$  обозначают поля смещений, вычисленные по (2,1) при помощи найденных ранее потенциалов  $\varphi_i, \psi_i$ .

это поле можно было считать решением динамической задачи для безграничной упругой среды, возбуждаемой включенными при  $t=0$  источниками, распределенными в полосе  $0 \leq z \leq h$ , с независимой от координаты  $z$  объемной плотностью силы (1,2).

Для нижеследующего нам понадобится явное выражение вектора (12,2), а также — явные выражения напряжений, создаваемых полем  $\vec{u}_0(x, z, t)$  на плоскостях  $z=0$  и  $z=h$ . Вычисляя по формулам (6,2), (7,2), (8,2), (9,2), (11,2) и (2,1) компоненты векторов  $\vec{u}_1(x, z, t; z_0)$  и  $\vec{u}_2(x, z, t; z_0)$  и выполняя несложное интегрирование (12,2), мы получаем для проекций вектора  $\vec{u}_0$  на оси координат следующие представления:

$$\left. \begin{aligned} u_0(x, z, t) &= \frac{1}{b\mu} \int_0^{k_1} V_0(z, t, k) \sin kx \, dk ; \\ \omega_0(x, z, t) &= \frac{-1}{b\mu} \int_0^{k_1} W_0(z, t, k) \cos kx \, dk , \end{aligned} \right\} (14,2)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \frac{e^{-(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} - e^{-zk\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}}{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} + \right. \\ &+ \left. \frac{e^{-zk\sqrt{1+\zeta^2}} - e^{-(h-z)k\sqrt{1+\zeta^2}}}{\sqrt{1+\zeta^2}} \right\} \times \frac{f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2k\zeta^2} e^{k\frac{t}{b}\zeta} d\zeta ; \\ W_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ -2 + e^{-zk\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} + e^{-(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{1+\zeta^2} [2 - e^{-zk\sqrt{1+\zeta^2}} - e^{-(h-z)k\sqrt{1+\zeta^2}}] \right\} \times \\ &\times \frac{f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2k\zeta^2} e^{k\frac{t}{b}\zeta} d\zeta . \end{aligned} \right\} (15,2)$$

Пользуясь же последними формулами, а также выражениями компонент тензора напряжений через компоненты век-

тора смещений, получаем для напряжений  $T_{xz}^{\delta}$  и  $T_{zz}^{\delta}$  на плоскости  $z=0$  (значок  $\delta=0$ ) и на плоскости  $z=h$  (значок  $\delta=h$ ) следующие окончательные формулы:

$$\left. \begin{aligned} T_{xz}^{\delta} &= \int_0^{k_1} T_1^{\delta}(t, k) \sin kx dk; \\ T_{zz}^{\delta} &= \int_0^{k_1} T_2^{\delta}(t, k) \cos kx dk, \end{aligned} \right\} (16,2)$$

в которых положено

$$\left. \begin{aligned} T_1^{\delta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tau_1^{\delta}(k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta; \\ T_2^{\delta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tau_2^{\delta}(k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \\ \tau_1^0(k, \zeta) &= \tau_1^h(k, \zeta) = \\ &= \left[ \frac{2+\zeta^2}{2(1+\zeta^2)} \chi(k\sqrt{1+\zeta^2}) - \chi(k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}) \right] \frac{f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{b\zeta^2}, \\ \tau_2^0(k, \zeta) &= -\tau_2^h(k, \zeta) = \\ &= \left[ \frac{2+\zeta^2}{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} \chi(k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}) - \frac{\chi(k\sqrt{1+\zeta^2})}{\sqrt{1+\zeta^2}} \right] \frac{f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{b\zeta^2}, \end{aligned} \right\} (18,2)$$

а также — введено следующее сокращенное обозначение:

$$\chi(p) = 1 - e^{-hp}. \quad (19,2)$$

Теперь нами уже получены все необходимые вспомогательные результаты и мы можем перейти к решению основной для настоящего параграфа задачи об упругом слое.

3. Пусть к элементам упругого слоя  $0 \leq z \leq h$  приложены нормальные массовые силы, заданные не зависящей от переменной  $z$  объемной плотностью (1,2).

Вектор  $\vec{u}_s(x, z, t)$  упругих смещений в слое, со свободными от напряжений границами, можно представить в виде суммы

$$\vec{u}_s = \vec{u}_0(x, z, t) + \vec{u}(x, z, t), \quad (20,2)$$

в которой  $\vec{u}_0(x, z, t)$  есть вектор с компонентами (14,2), а  $\vec{u}(x, z, t)$  представляет собой добавочное поле смещений, удовлетворяющее однородным уравнениям движения, нулевым начальным данным и подчиненное следующим условиям на граничных поверхностях слоя:

$$\left. \begin{aligned} T_{xz} \Big|_{z=0} &= -T_{xz}^0; & T_{zz} \Big|_{z=0} &= -T_{zz}^0; \\ T_{xz} \Big|_{z=h} &= -T_{xz}^h; & T_{zz} \Big|_{z=h} &= -T_{zz}^h. \end{aligned} \right\} (21,2)$$

В последних формулах  $T_{xz}^0$  и  $T_{zz}^0$  имеют значения из (16,2).

Если ввести потенциалы  $\varphi(x, z, t)$  и  $\psi(x, z, t)$ , посредством которых компоненты поля  $\vec{u}(x, z, t)$  выражаются в виде (2,1), то задача определения упомянутых потенциалов сведется к построению решений уравнений (3,1) в слое  $0 \leq z \leq h$  при начальных данных (4,1) и при условиях (21,2) на граничных поверхностях.

Решение такой задачи мы снова будем искать в виде интегралов (9,1), причем для определения функций  $R(z, t, k)$  и  $S(z, t, k)$  снова получим уравнения (10,1), условия (11,1) и граничные соотношения (12,1), в левых частях первых двух из которых вместо нулей теперь будут стоять, соответственно, функции  $[-T_1^h(t, k)]$  и  $[-T_2^h(t, k)]$ , а в левых частях двух последних соотношений будут стоять вместо  $\tau_1(t, k)$  и  $\tau_2(t, k)$ , соответственно,  $T_1^0(t, k)$  и  $T_2^0(t, k)$  из (16,2). Переходя от функций  $R(z, t, k)$  и  $S(z, t, k)$  к функциям  $X_0(z, s, k)$  и  $Y_0(z, s, k)$  по (15,1) мы получаем для последних уравнения (16,1) и следующие условия на границах:

$$\mu \left[ 2k \frac{\partial X_0}{\partial z} + k^2 Y_0 + \frac{d^2 Y_0}{dz^2} \right] \Big|_{z=h} = \frac{b}{k} \tau_1^h \left( k, \frac{bs}{k} \right);$$

$$\left\{ -\lambda k^2 X_0 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 X_0}{\partial z^2} + 2\mu k \frac{\partial Y_0}{\partial z} \right\} \Big|_{z=h} =$$

$$= -\frac{b}{k} \tau_2^h \left( k, \frac{bs}{k} \right);$$

$$\mu \left[ 2k \frac{\partial X_0}{\partial z} + k^2 Y_0 + \frac{\partial^2 Y_0}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=0} = \frac{b}{k} \tau_1^0 \left( k, \frac{bs}{k} \right);$$

$$\left\{ -\lambda k^2 X_0 + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 X_0}{\partial z^2} + 2\mu k \frac{\partial Y_0}{\partial z} \right\} \Big|_{z=0} =$$

$$= -\frac{b}{k} \tau_2^0 \left( k, \frac{bs}{k} \right),$$

в которых функции  $\tau_v^{\delta} \left( k, \zeta \right)$  имеют значения (18,2). Для функций  $X_0$  и  $Y_0$  мы снова получим выражения (18,1), коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  в которых будут определяться из следующих алгебраических уравнений:

$$-2k \sqrt{a^2 s^2 + k^2} \gamma + (2k^2 + b^2 s^2) \beta = \frac{b}{k\mu} \tau_1^h \left( k, \frac{bs}{k} \right);$$

$$-2k \sqrt{a^2 s^2 + k^2} [\gamma \operatorname{ch} h \sqrt{a^2 s^2 + k^2} + \delta \operatorname{sh} h \sqrt{a^2 s^2 + k^2}] +$$

$$+ (2k^2 + b^2 s^2) [\alpha \operatorname{sh} h \sqrt{b^2 s^2 + k^2} + \beta \operatorname{ch} h \sqrt{b^2 s^2 + k^2}] =$$

$$= \frac{b}{k\mu} \tau_1^0 \left( k, \frac{bs}{k} \right);$$

$$(2k^2 + b^2 s^2) \delta - 2k \sqrt{b^2 s^2 + k^2} \alpha =$$

$$= -\frac{b}{k\mu} \tau_2^h \left( k, \frac{bs}{k} \right);$$

$$(2k^2 + b^2 s^2) [\gamma \operatorname{sh} h \sqrt{a^2 s^2 + k^2} + \delta \operatorname{ch} h \sqrt{a^2 s^2 + k^2}] -$$

$$- 2k \sqrt{b^2 s^2 + k^2} [\alpha \operatorname{ch} h \sqrt{b^2 s^2 + k^2} + \beta \operatorname{sh} h \sqrt{b^2 s^2 + k^2}] =$$

$$= -\frac{b}{k\mu} \tau_2^0 \left( k, \frac{bs}{k} \right).$$

Наконец, если учесть соотношения  $\tau_1^0(k, \zeta) = \tau_1^h(k, \zeta)$  и

$\tau_2^0(k, \zeta) = -\tau_2^h(k, \zeta)$ , перейти к переменной  $\zeta$  по формуле (22,1) и ввести следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{b}{k} \tau_1^0(k, \zeta) [1 - \operatorname{ch} hk \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}] + \\ &+ \frac{b}{k} \tau_2^0(k, \zeta) \frac{2\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}{2 + \zeta^2} \operatorname{sh} hk \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}; \\ F_2 &= \frac{b}{k} \tau_2^0(k, \zeta) [1 + \operatorname{ch} hk \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}] - \\ &- \frac{b}{k} \tau_1^0(k, \zeta) \frac{2 + \zeta^2}{2\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}} \operatorname{sh} hk \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}, \end{aligned} \right\} (22,2)$$

то легко можно убедиться в том, что коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  выражаются формулами

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{(2 + \zeta^2) DF_1 - BF_2}{\mu k^2 \sqrt{1 + \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)}, \\ \beta &= \frac{(2 + \zeta^2) CF_1 + AF_2}{\mu k^2 \sqrt{1 + \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)}, \\ \gamma &= \frac{-b \tau_1^0(k, \zeta)}{2\mu k^3 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}} + \\ &+ \frac{2 + \zeta^2}{2\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}} \cdot \frac{AF_2 - (2 + \zeta^2) CF_1}{\mu k^2 \sqrt{1 + \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)}, \\ \delta &= \frac{b \tau_2^0(k, \zeta)}{\mu k^3 (2 + \zeta^2)} - \\ &- \frac{2\sqrt{1 + \zeta^2}}{2 + \zeta^2} \cdot \frac{(2 + \zeta^2) DF_1 + BF_2}{\mu k^2 \sqrt{1 + \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)}, \end{aligned} \right\} (23,2)$$

в которых  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  имеют значения из (24,1), а  $\Delta_0(k, \zeta)$  определяется по (25,1).

Теперь нам остается лишь подставить значения коэффициентов (23,2) в формулы (18,1), найти значения функций  $X_0$  и  $Y_0$  и, путем обращения интегралов Лапласа (15,1), определить функции  $R(z, t, k)$  и  $S(z, t, k)$ . При этом получаем следующие результаты:

$$\left. \begin{aligned} R(z, t, k) &= R_1 + R_2 + R_3, \\ S(z, t, k) &= S_1 + S_2 + S_3, \end{aligned} \right\} (24,2)$$

где

$$R_1 = \frac{1}{2\mu k^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ \frac{-\tau_1^0(k, \zeta) \operatorname{sh}[(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}]}{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} + \right. \\ \left. + \frac{2}{2+\zeta^2} \tau_2^0(k, \zeta) \operatorname{ch}[(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}] \right\} e^{\frac{kt}{b}\zeta} d\zeta, \quad (25,1,2)$$

$$S_1 = 0;$$

$$R_2 = \frac{1}{\mu b k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Phi_1(z, k, \zeta) F_1}{2\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} e^{\frac{kt}{b}\zeta} d\zeta, \quad (25,2)$$

$$S_2 = \frac{1}{\mu b k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Phi_2(z, k, \zeta) F_1}{2\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} e^{\frac{kt}{b}\zeta} d\zeta;$$

$$R_3 = \frac{1}{\mu b k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Phi_2(z, k, \zeta) F_2}{2\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} e^{\frac{kt}{b}\zeta} d\zeta, \quad (25,3,2)$$

$$S_3 = \frac{1}{\mu b k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Phi_4(z, k, \zeta) F_2}{2\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} e^{\frac{kt}{b}\zeta} d\zeta.$$

Заметим, что функции  $\Phi_i(z, k, \zeta)$  в последних формулах имеют значения из (27,1).

Итак, мы можем утверждать, что потенциалы  $\varphi$  и  $\psi$  добавочного поля смещений  $\vec{u}(x, z, t)$  из (20,2) представляются следующими интегралами Фурье

$$\varphi(x, z, t) = \int_0^{k_1} R(z, t, k) \cos kx dk, \\ \psi(x, z, t) = \int_0^{k_1} S(z, t, k) \sin kx dk, \quad (26,2)$$

в которых функции  $R$  и  $S$  определяются по формулам (24,2) и (25,2). Последние же имеют структуру, вполне аналогичную структуре формул (26,1), что удобно будет использовать при наших дальнейших исследованиях.

По найденным потенциалам  $\varphi$  и  $\psi$  не представляет труда вычислить и добавочное поле смещений  $\vec{u}(x, z, t)$ , которое по (20,2), совместно с полем (14,2), определяет полное поле смещений  $\vec{u}_s$  в упругом слое. Выражения для компонент вектора  $\vec{u}_s$  будут даны в § 5. Из упомянутых выражений будет ясно видно, что одного лишь факта равномерности распределения плотности нормальной силы (1,2) по сечению слоя совершенно недостаточно для того, чтобы вектор  $\vec{u}_s$  удовлетворял уравнениям теории тонких пластин. Мы увидим, что если не сделать специальных предположений<sup>1</sup> о зависимости от  $x$  и  $t$  функций (1,2) (выражающих требование плавности их распределения вдоль поверхности слоя и медленности изменения во времени), то компоненты вектора  $\vec{u}_s$  оказываются существенно зависящими от переменной  $z$  (т. е. неоднородными по сечению слоя), и эти компоненты существенно не удовлетворяют уравнениям теории колебаний тонких пластин. При этом окажется, что случай нормального воздействия, равномерно распределенного по сечению слоя, почти не обладает никакими преимуществами по сравнению со случаем нормальной поверхностной силы, рассмотренной в § 1. Вследствие сказанного, мы сможем в дальнейшем утверждать, что соображения, сформулированные в начале настоящего параграфа, лишены серьезного основания.

### § 3. Колебания упругого слоя под действием осесимметрической поверхностной силы<sup>2</sup>

1. Пусть граничная поверхность  $z = h$  изотропного упругого слоя, находящегося в покое при  $t < 0$ , остается свободной от напряжений, а на границу  $z = 0$  в момент  $t = 0$  начинает действовать нормальное напряжение  $\vec{T} = T(\rho, t)\vec{k}$ , не зависящее от переменной  $\varphi$  цилиндрической системы координат.

Вводя скалярный  $\varphi(\rho, z, t)$  и векторный  $\psi(\rho, z, t)$  потенциалы, посредством которых вектор упругих смещений представляется в виде

<sup>1</sup> Совершенно таких же, как не были сделаны в случае поверхностной нормальной силы (§ 1).

<sup>2</sup> Случай осевой симметрии для слоя при неполном разделении переменных впервые был рассмотрен в 1949 г. К. И. Огурцовым<sup>[2]</sup>.

$$\vec{u} = q(\rho, z, t) \vec{\rho}_1 + w(\rho, z, t) \vec{k}_1, \quad (1,3)$$

где

$$q = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\psi}{\rho},$$

не трудно убедиться в том, что динамическая задача для слоя  $0 \leq z \leq h$  сводится к построению решений уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\psi}{\rho^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (1,3)$$

при нулевых начальных данных

$$\varphi = \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (\text{при } t = 0), \quad (4,3)$$

и следующих условиях на границах:

$$\left. \begin{aligned} \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=h} &= 0, \\ \left[ (b^2 - 2a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \Big|_{z=h} &= 0; \end{aligned} \right\} (5,3)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho \partial z} + b^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=0} &= 0; \\ \mu \left[ (b^2 - 2a^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho \partial z} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} &= -T(\rho, t). \end{aligned} \right\} (6,3)$$

Мы будем предполагать, что граничная функция  $T(\rho, t)$  представляется интегралом Фурье-Бесселя

$$T(\rho, t) = \int_0^{k_1} \tau(t, k) J_0(k\rho) dk, \quad (7,3)$$

функция  $\tau(t, k)$  в котором подчинена тем же условиям, что и функции  $\tau_\nu(t, k)$  из (8,1). Верхний же предел  $k_1$  интегрирования в (7,3), вообще говоря, будем считать конечным числом.

Тогда решение задачи можно искать в виде интегралов

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \int_0^{k_1} R(z, t, k) J_0(k\rho) dk, \\ \psi &= \int_0^{k_1} S(z, t, k) J_1(k\rho) dk, \end{aligned} \right\} (8,3)$$

производные от которых можно получать путем дифференцирования подинтегральных функций.

Если бы мы подставили значения (8,3) в уравнения и условия (3,3) — (6,3) и если бы мы воспользовались формулой (7,3), а также известными соотношениями между функциями Бесселя:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_0(k\rho)}{d\rho} &= -kJ_1(k\rho); \quad \frac{dJ_1(k\rho)}{d\rho} + \\ &+ \frac{1}{\rho} J_1(k, \rho) = kJ_0(k\rho), \end{aligned}$$

то без труда смогли бы прийти к граничной задаче для функций  $R(z, t, k)$  и  $S(z, t, k)$ , вполне аналогичной задаче, рассмотренной в § 1. Решение такой задачи было бы удобно производить при помощи одностороннего преобразования Лапласа.

Обозначая

$$f(s, k) = \int_0^{\infty} e^{-st} \tau(t, k) dt \quad (9,3)$$

и проделывая несложные вычисления, мы получили бы для  $R(z, t, k)$  и  $S(z, t, k)$  окончательные формулы

$$\left. \begin{aligned} R(z, t, k) &= \frac{1}{\mu b k 2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Phi_2(z, k, \zeta) f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta; \\ S(z, t, k) &= \frac{1}{\mu b k 2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Phi_4(z, k, \zeta) f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \end{aligned} \right\} (10,3)$$

тождественные формулам (28,1), в которых функции  $\Phi_2$  и  $\Phi_4$  имеют значения из (27,1), а  $\Delta_0(k, \zeta)$  определяется равенством (25,1). Не представляло бы также труда доказать, что формулами (8,3) и (10,3) действительно определяется правильное решение нашей динамической задачи о слое.

Рассмотрение случая осесимметрического нормального воздействия показывает, что форма решения динамической задачи для упругого слоя в случае осевой симметрии отличается от формы решения плоской динамической задачи первого параграфа лишь тем, что интегралы Фурье (9,1) заменяются в случае осевой симметрии интегралами Фурье-Бесселя. Вид же подинтегральных функций  $R(z, t, k)$  и  $S(z, t, k)$  в обоих случаях оказывается тождественным. Как будет видно из следующего параграфа, последнее обстоятельство позволяет при исследовании решения задачи об упругом слое всегда ограничиваться рассмотрением лишь плоского случая. Полученные же при этом результаты можно автоматически распространять и на случай осесимметрических (а также и произвольных) граничных нормальных воздействий.

2. При помощи метода неполного разделения переменных не представляло бы труда рассмотреть и случай произвольного граничного воздействия на упругий слой. Решение подобной задачи о колебаниях упругого слоя можно было бы искать в виде двукратных интегралов Фурье (относительно граничных переменных  $x$  и  $y$ ), подинтегральная функция которых зависела бы от переменных  $z$  и  $t$  и представлялась бы некоторым интегралом Меллина. Но интегралы Меллина для упомянутой подинтегральной функции оказываются уже существенно отличающимися от интегралов вида (28,1). Поэтому исследование решения задачи в общем случае следовало бы производить способом, не совпадающим со способом исследования решений § 1. А это загромождало бы все наше исследование. Вследствие изложенного мы откажемся от рассмотрения общего случая нормального воздействия.

Последнее наше решение представляется тем более оправданным, что случай произвольно распределенной по граничной поверхности слоя нормальной силы (который представлял бы для нас основной интерес) может быть сведен, с известным приближением, к наложению конечного числа осесимметрических нормальных сил, с различными параллельными друг другу осями симметрии. Последнее обстоятельство позволит нам в нижеследующем считать, что все результаты и выводы, полученные для случая осесимметрического нормального воздействия, распространяются и на

случай, когда на упругий слой действуют произвольные силы. Более подробно на этом вопросе не будем пока останавливаться, а перейдем к обсуждению идеи сопоставления уравнений колебания тонких пластин с точными уравнениями теории упругости.

#### § 4. Идея сопоставления решений с решениями уравнений теории тонких пластин

Как известно, поперечные колебания тонкой пластины, срединная плоскость которой в невозмущенном состоянии совпадает с плоскостью  $XOY$ , характеризуются параллельными оси  $Oz$  отклонениями  $w_0(x, y, t)$  элементов срединной плоскости от положения равновесия. При этом (вследствие известных соображений, обсуждаемых далее) принимается, что в случае действия на пластину нормальной силы, с поверхностной плотностью  $F(x, y, t)$ , функция  $w_0(x, y, t)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Delta \Delta w_0 + \rho_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \frac{\rho_0^2}{\rho_0 h} F, \quad (1,4)$$

в котором  $\rho_0$  есть массовая плотность материала пластины,  $h$  — ее толщина, а  $\rho_0^2$  — коэффициент, выражающийся через упругие постоянные среды по формуле

$$\rho_0^2 = \frac{3\rho_0(\lambda + 2\mu)}{h^2 \mu(\lambda + \mu)} = \frac{12\rho_0(m^2 - 1)}{h^2 m^2 E}. \quad (2,4)$$

В случае плоской поверхностной силы  $F = F(x, t)$  смещение оказывается не зависящим от переменной  $y$  и удовлетворяет следующему уравнению движения:

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \rho_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \frac{\rho_0^2}{\rho_0 h} F(x, t). \quad (3,4)$$

В случае же осесимметрической плотности силы  $F = F(\rho, t)$  уравнение движения будет иметь следующий вид:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \left[ \frac{\partial w_0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial \rho} \right] + \rho_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \frac{\rho_0^2 F(\rho, t)}{\rho_0 h}. \quad (4,4)$$

В теории тонких пластин принимается, что кроме нормальных смещений  $w_0$  элементы срединной плоскости испыты-

вают и касательные смещения  $u_0(x, y, t)$ , удовлетворяющие уже уравнениям второго порядка относительно  $x$ ,  $y$  и  $t$ . Для изложения идеи сопоставления вид этих уравнений нам не понадобится. Сами же уравнения мы получим (из строгих решений задачи об упругом слое) в § 8 нашей работы.

1. Задача сопоставления точных решений уравнений теории упругости для слоя с уравнениями колебаний тонких пластин должна заключаться в выяснении внешних условий, при соблюдении которых вектор упругих смещений  $\vec{u}$  (строго удовлетворяющий уравнениям теории упругости) может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1, \quad (5,4)$$

из которых первое удовлетворяет уравнениям теории тонких пластин, а второе оказывается весьма малым по сравнению с первым.

Но при решении задач теории упругости в случае слоя мы представляли вектор упругих смещений  $\vec{u}(x, y, z, t)$  в виде интегралов Фурье или же интегралов Фурье-Бесселя, подинтегральные функции в которых выражались некоторыми интегралами Меллина. Подобное же представление в виде интегралов Фурье (или Фурье-Бесселя) будет иметь место и для вектора  $\vec{u}_0$  из правой части (5,4). Поэтому представляется естественным попытаться облегчить процесс сопоставления решений тем, что предварительно построить решения уравнений (3,4) и (4,4) в таком же виде, в каком мы строили решения задач теории упругости, т. е. в виде упоминавшихся интегралов. Тогда процесс сопоставления можно будет проводить путем рассмотрения подинтегральных функций, что существенно облегчит все наше исследование.

2. Пусть функция  $F(x, t)$  из (3,4) представляется формулой

$$F(x, t) = \int_0^{k_1} \tau_2(t, k) \cos kx dk, \quad (6,4)$$

в которой  $\tau_1(t, k)$  удовлетворяет тем же условиям, что и функции  $\tau_2(t, k)$  в (8,1).

Будем искать решение уравнения (3, 4), удовлетворяющее нулевым начальным данным, в виде интеграла

$$w_0(x, t) = \int_0^{k_1} \bar{R}(t, k) \cos kx dk. \quad (7,4)$$

Подстановка (7,4) в (3,4) приводит к уравнению

$$k^4 \bar{R} + p_0^2 \frac{d^2 \bar{R}}{dt^2} = \frac{p_0^2}{\rho_0 h} \tau_2(t, k), \quad (8,4)$$

решение которого, при учете нулевых начальных данных, удобно искать по Лапласу.

Обозначая, как и обычно,

$$f(s, k) = \int_0^{\infty} \tau_2(t, k) e^{-st} dt \quad (9,4)$$

и выполняя элементарные выкладки, мы находим для  $\bar{R}$  следующее окончательное выражение:

$$\bar{R}(t, k) = \frac{b}{h \rho_0 k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{\zeta^2 + \frac{k^2 b^2}{p_0^2}} e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta. \quad (10,4)$$

Нетрудно было бы проверить, что формулами (7,4) и (10,4) действительно представляется решение уравнения (3,4), удовлетворяющее нулевым начальным данным.

При сопоставлении решений уравнений теории тонких пластин с решениями точных уравнений теории упругости будем считать, что нормальная сила  $F_2(x, t)$  из (8,1), действующая на поверхность упругого слоя, в точности совпадает с силой (6,4), а плотность равномерно распределенной по сечению слоя нормальной силы (1,2) подчинена условию

$$hF_0(x, t) = F(x, t), \quad (11,4)$$

в котором  $F_0(x, t)$  и  $F(x, t)$  имеют значения, соответственно, из (1,2) и (6,4). При этом нам будет удобно считать, что функция  $\tau_2(t, k)$  представляется в виде интеграла

$$\tau_2(t, k) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} c(k, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (12,4)$$

содержащего произвольную относительно  $k$  и  $\omega$  непрерывную функцию  $c(k, \omega)$ , пределы интегрирования  $\omega_0$  в котором являются ограниченными числами, удовлетворяющими некоторым условиям.

В предположении (12,4) вместо (9,4) мы будем иметь

$$f(s, k) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} c(k, \omega) \frac{d\omega}{s - i\omega},$$

вследствие чего формула (10,4) примет теперь следующий вид:

$$\begin{aligned} R &= \frac{b^2}{h\rho_0 k^2} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} c(k, \omega) \frac{d\omega}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta}{(\zeta^2 + k^2 b^2 p_0^{-2}) \left( \zeta - i \frac{b\omega}{k} \right)} = \\ &= \frac{p_0^2}{h\rho_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} c(k, \omega) \left[ \frac{e^{i\omega t}}{k^2 - p_0^2 \omega^2} - \frac{e^{i \frac{k^2}{p_0} t}}{2k^2 (k^2 - p_0 \omega)} - \frac{e^{-i \frac{k^2}{p_0} t}}{2k^2 (k^2 + p_0 \omega)} \right] d\omega. \quad (13,4) \end{aligned}$$

На эту формулу мы будем ссылаться в § 8.

3. Совершенно аналогично вышеизложенному рассматривается и случай осевой симметрии. Пусть функция  $F(\rho, t)$  из (4,4) представляется интегралом

$$F(\rho, t) = \int_0^{k_1} \tau_2(t, k) J_0(k\rho) dk, \quad (14,4)$$

в котором  $\tau_2(t, k)$  есть функция, подобная функции из (6,4).

Если искать решение уравнения (4,4), удовлетворяющее нулевым начальным данным, в виде интеграла

$$\omega_0 = \int_0^{k_1} \bar{R}(t, k) J_0(k\rho) dk, \quad (15,4)$$

то для определения функции  $\bar{R}(t, k)$  мы получим задачу, в точности совпадающую с задачей определения функции  $\bar{R}$  в предыдущем пункте настоящего параграфа. Поэтому в случае осевой симметрии функция  $\bar{R}(t, k)$  из (15,4) представляется теми же формулами (10,4) или (13,4), какими пред-

ставлялась функция  $\bar{R}$  из (7,4) в случае плоской задачи. С подобным положением мы уже встречались в § 3.

Полученный только что результат, вместе с результатом (10,3), действительно оправдывает сделанное в предыдущем параграфе утверждение о том, что для полного сопоставления решений задач теории упругости в случае слоя с решениями уравнений теории тонких пластин вполне достаточно ограничиться рассмотрением одного лишь плоского случая. Все же полученные при таком рассмотрении выводы будут автоматически распространяться и на случай осесимметрических нормальных воздействий. Если, наконец, учесть возможность представления произвольных нормальных сил наложением сил с осевой симметрией, то, повидимому, все результаты, полученные нами при исследовании решений плоских задач, можно будет распространить и на случай нормальных сил, произвольным образом распределенных по пластине.

Вследствие сказанного, нам будет достаточно в нижеследующем лишь произвести исследование решений плоских задач из §§ 1 и 2.

4. В заключение параграфа представляется полезным обсудить некоторые обстоятельства, связанные с конечностью пределов интегрирования в интегралах Фурье (и Фурье-Бесселя), а также в интеграле (12,4).

Причины, заставляющие нас выбирать нормальное воздействие на упругий слой в виде интеграла (6,4), подинтегральная функция  $\tau_2$  которого в свою очередь представляется интегралом (12,4), будут выяснены полностью лишь в §§ 7 и 8. [Эти причины, в основной своей части, оказываются связанными с аномальным поведением при малых значениях  $hk$  наименьших корней уравнения  $\Delta_0(k, \zeta) = 0$ , исследуемого в § 6.] Но уже сейчас полезно сформулировать основные наши результаты. В § 7 будет показано, что пределы  $k_1$  и  $\omega_0$  интегрирования в интегралах (6,4) и (12,4) должны удовлетворять неравенствам

$$k_1 h \ll 1 \text{ и } \omega_0 b h \ll 1, \quad (16,4)$$

так как только последние неравенства дают возможность представить поле смещений  $\vec{u}$  в упругом слое формулой (5,4), в которой  $\vec{u}_0$  удовлетворяет уравнениям теории тонких пластин, а второе слагаемое  $\vec{u}_1$  оказывается пренебрежимо малым. Поэтому соотношения (16,4) мы должны будем

рассматривать как условия применимости теории тонких пластин.

Если воспользоваться известной теоремой теории тригонометрических интегралов, утверждающей, что ни при каком выборе непрерывной функции  $\Phi(k)$  нельзя добиться такого положения, при котором функции вида

$$F(x) = \int_{k_0}^{k_1} \Phi(k) \begin{cases} \cos kx \\ \sin kx \end{cases} dk$$

равнялись бы нулю (или же были бы пренебрежимо малы) везде, за исключением некоторого конечного промежутка  $(x_0, x_1)$ , шириною  $\Delta x = x_1 - x_0$ , меньшей величины  $(k_1 - k_0)^{-1}$ , то сразу же становится ясным смысл физических утверждений, содержащихся в неравенствах (16,4). Действительно, из приведенной теоремы следует, что формула вида (6,4) представляет „плавное распределенное“ воздействие в том смысле, что функция  $F(x, t)$ , не имеющая резких максимумов и минимумов, наверняка отлична от нуля в промежутке  $\Delta x$ , ширина которого, во всяком случае, превосходит значение  $k_1^{-1}$ . Но тогда из первого неравенства (16,4) вытекает важное соотношение

$$\Delta x \geq N h, \quad (17,4)$$

содержащее большое число  $N$  и показывающее, что теория тонких пластин может применяться лишь в том случае, если ширина области приложения нормальной силы, а также ширина промежутка „заметного“ ее изменения много больше толщины самой пластины.

Также нетрудно переписать и второе условие (16,4) в более наглядном виде. Для того чтобы это сделать, обозначим:  $T_0 = 2\pi\omega_0^{-1}$  и заметим, что величина  $T_0$  характеризует собой время „заметного изменения“ функции вида (12,4). Последнее утверждение (вполне очевидное с физической точки зрения) вытекает из упоминавшейся теоремы теории тригонометрических интегралов. Если же воспользоваться величиной  $T_0$  и ввести обозначение  $\tau_0 = hb$  для времени прохождения поперечных упругих волн через сечение слоя, то можно переписать второе условие (16,4) в виде неравенства

$$T_0 \geq N_1 \tau_0, \quad (18,4)$$

в котором  $N_1$  обозначает большое число. Последнее неравенство показывает, что теория тонких пластин применима

только в том случае, если действующая на пластину сила изменяется „медленно“ в смысле (18,4). Более подробно условия (17,4) и (18,4) будем обсуждать в последних параграфах нашей работы.

### § 5. Вспомогательные преобразования и формулы

1. Преобразуем к более удобному виду выражения, стоящие в правых частях формул (24,1) и (25,1). Для этой цели воспользуемся элементарными тождествами

$$\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - 1 = 2 \left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\beta}{2} \right];$$

$$\frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta - 1}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{\beta}{2} + \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cth} \frac{\beta}{2} \right]$$

и введем, ради краткости письма, следующие обозначения:

$$\alpha = hk \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}; \quad \beta = hk \sqrt{1 + \zeta^2}. \quad (1,5)$$

Тогда легко можно получить важную для нижеследующего формулу

$$2 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta) = - \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \beta L_1(k, \zeta) L_2(k, \zeta), \quad (2,5)$$

в которой

$$\left. \begin{aligned} L_1(k, \zeta) &= (2 + \zeta^2)^2 \operatorname{th} \frac{\beta}{2} - 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}, \\ L_2(k, \zeta) &= (2 + \zeta^2)^2 \operatorname{cth} \frac{\beta}{2} - 4 \sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (3,5)$$

Подобным же образом не представляло бы труда проверить, что для величин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  из (24,1) оказываются справедливыми соотношения:

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} L_1(k, \zeta) - 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} L_2(k, \zeta), \\ B &= 2 \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \left[ \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha}{2} L_1(k, \zeta) - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} L_2(k, \zeta) \right], \\ C &= - \frac{2 \sqrt{1 + \zeta^2}}{(2 + \zeta^2)^2} B, \\ D &= \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}} \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} [L_1(k, \zeta) - L_2(k, \zeta)]. \end{aligned} \right\} \quad (4,5)$$

из которых, равно как из (2,5), получаются следующие окончательные равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\Delta_0(k,\zeta)} &= \frac{\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}\operatorname{th}\frac{\beta}{2}}{L_1(k,\zeta)} - \frac{\operatorname{cth}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cth}\frac{\beta}{2}}{L_2(k,\zeta)}, \\ \frac{B}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\Delta_0(k,\zeta)} &= \frac{\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}}{L_1(k,\zeta)} - \frac{\operatorname{cth}\frac{\alpha}{2}}{L_2(k,\zeta)}, \end{aligned} \right\} (5,5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{C}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\Delta_0(k,\zeta)} &= \frac{2\sqrt{1+\zeta^2}}{(2+\zeta^2)^2} \left[ \frac{\operatorname{cth}\frac{\alpha}{2}}{L_2(k,\zeta)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\operatorname{th}\frac{\alpha}{2}}{L_1(k,\zeta)} \right], \end{aligned} \right\} (6,5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\Delta_0(k,\zeta)} &= \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} \left[ \frac{1}{L_1(k,\zeta)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{L_2(k,\zeta)} \right]. \end{aligned} \right\}$$

Нужно отметить, что равенства (5,5) и (6,5) окажутся весьма полезными для преобразования подинтегральных функций в интегралах Меллина, входящих в выражения для компонент векторов упругих смещений в задачах о слое. Что же касается множителей (3,5), на которые распадается характеристический определитель (2,5), то они существенны потому, что уравнения  $L_\nu = 0$  определяют расположение особых точек подинтегральных функций в упоминавшихся интегралах. Далее будет показано, что уравнения  $L_\nu(k,\zeta) = 0$  имеют бесконечные множества простых корней  $\zeta = i\tau$ , определяющих частоты  $\omega = \frac{k}{b}\tau$  собственных колебаний упругого слоя.

2. Пользуясь представлениями потенциалов (9,1) и (28,1), а также учитывая (27,1), нетрудно вычислить по (2,1) компоненты вектора упругих смещений поля, возбужденного в слое действием (включенной в момент времени  $t=0$ ) плоской нормальной силы  $F_2(x,t)$  из (8,1). Выполняя диф-

Ференцирование, мы легко получаем для упомянутых компонент выражения

$$\left. \begin{aligned} u(x, z, t) &= \frac{1}{b\mu} \int_0^{k_1} U(z, t, k) \sin kx dk, \\ w(x, z, t) &= \frac{-1}{b\mu} \int_0^{k_1} W(z, t, k) \cos kx dk, \end{aligned} \right\} (7,5)$$

Функции  $U$  и  $W$  в которых определяются интегралами Меллина

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Theta(z, k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \\ W &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T(z, k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta \end{aligned} \right\} (8,5)$$

от следующих подинтегральных функций:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(z, k, \zeta) &= f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right) \left\{ p_1(z) \frac{A}{\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} p_2(z) \frac{B}{\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} \right\}, \\ T(z, k, \zeta) &= f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right) \left\{ \frac{2+\zeta^2}{2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} q_2(z) \times \right. \\ &\times \frac{A}{\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} + \frac{2\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}}{2+\zeta^2} q_1(z) \times \\ &\times \left. \frac{B}{\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} \right\}. \end{aligned} \right\} (9,5)$$

В последних формулах мы воспользовались обозначениями

$$\left. \begin{aligned} p_1(z) &= \sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \operatorname{sh}[(h-z)k \sqrt{1+\zeta^2}] - \\ &- \frac{2+\zeta^2}{2} \operatorname{sh}[(h-z)k \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}], \\ p_2(z) &= \frac{2}{2+\zeta^2} \operatorname{ch}[(h-z)k \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}] - \\ &- \operatorname{ch}[(h-z)k \sqrt{1+\zeta^2}], \end{aligned} \right\} (10,5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 q_1(z) &= \frac{2+\zeta^2}{2} \operatorname{sh} [(h-z)k\sqrt{1+\zeta^2}] - \sqrt{1+\zeta^2} \times \\
 &\quad \times \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \operatorname{sh} [(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}], \\
 q_2(z) &= \operatorname{ch} [(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}] - \frac{2}{2+\zeta^2} \times \\
 &\quad \times \operatorname{ch} [(h-z)k\sqrt{1+\zeta^2}],
 \end{aligned} \right\} (10,5)$$

в которых, ради краткости, не указана явная зависимость  $p_v(z)$  и  $q_v(z)$  от переменных  $k$  и  $\zeta$ .

Формулы (7,5), (8,5), (9,5) и (10,5) будем считать исходными при исследовании колебаний упругого слоя под действием поверхностной нормальной силы. При этом вместо последних сомножителей в слагаемых фигурных скобок (9,5) будем подставлять значения упомянутых сомножителей из формул (5,5). Заметим, что [в случае однозначных  $f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)$ ] подинтегральные функции в (8,5) оказываются однозначными функциями на всей комплексной плоскости  $\zeta$ . Это обстоятельство позволит нам производить вычисление интегралов (8,5) по вычетам в особых точках  $f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)$ , а также — во всех особых точках функций (5,5). Последние же действительно совпадают с корнями уравнений  $L_v(k, \zeta) = 0$  и всегда оказываются простыми.

3. Иногда утверждают, что теория колебаний тонких пластин может быть обоснована путем усреднения по толщине пластины строгих решений уравнений теории упругости и не нуждается в ограничительных предположениях о характере внешнего воздействия. Чтобы установить, имеются ли основания для такого утверждения, мы усредним (по переменной  $z$ ) точные решения задачи о слое, приведенные в предыдущем пункте настоящего параграфа, и затем (в § 7) подвергнем результат усреднения общему исследованию. При этом исходными для упомянутого исследования можем считать выражения (7,5), (8,5) и (9,5), переменная  $z$  в которых отсутствует, а значения величин  $p_v$  и  $q_v$  определяются формулами

$$\left. \begin{aligned}
 p_1 &= \frac{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}{kh} \left[ \operatorname{ch} \beta - 1 - \frac{2+\zeta^2}{2(1+\gamma^2\zeta^2)} (\operatorname{ch} \alpha - 1) \right], \\
 p_2 &= \frac{2}{2+\zeta^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha}{kh\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} - \frac{\operatorname{sh} \beta}{kh\sqrt{1+\zeta^2}},
 \end{aligned} \right\} 11,5)$$

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{kh} \left[ \frac{2+\zeta^2}{2(1+\zeta^2)} (\operatorname{ch} \beta - 1) - 1 - \operatorname{ch} \alpha \right], \\ q_2 &= \frac{\operatorname{sh} \alpha}{kh \sqrt{1+\zeta^2}} - \frac{2}{2+\zeta^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta}{kh \sqrt{1+\zeta^2}}, \end{aligned} \right\} (11,5)$$

при условии, что  $\alpha$  и  $\beta$  определяются по (1,5).

4. Перейдем теперь к преобразованию решения задачи об упругом слое из § 2. При рассмотрении колебаний слоя под действием равномерно распределенной по сечению нормальной силы [с объемной плотностью (1,2), включенной при  $t=0$ ] мы представляли вектор упругих смещений суммой двух слагаемых (20,2). Первое слагаемое в последней формуле имело простой вид и представлялось выражениями (14,2) и (15,2). Второе же слагаемое мы пока еще не вычисляли.

При вычислении второго слагаемого  $\vec{u}$  мы будем разбивать его на три части:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \quad (12,5)$$

соответственно представлению потенциалов (26,2) в виде сумм трех слагаемых

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3; \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad (12,5)$$

в которых

$$\begin{aligned} \varphi_v &= \int_0^{k_1} R_v(z, t, k) \cos kx dk, \\ \psi_v &= \int_0^{k_1} S_v(z, t, k) \sin kx dk, \end{aligned} \quad (13,5)$$

а  $R_v$  и  $S_v$  имеют значения из формул (25,2). Пользуясь последними формулами, а также формулами (2,1) для составляющих векторов смещений, без труда находим

$$\left. \begin{aligned} u_v &= \frac{1}{b\mu} \int_0^{k_1} U_v(z, t, k) \sin kx dk, \\ w_v &= \frac{-1}{b\mu} \int_0^{k_1} W_v(z, t, k) \cos kx dk, \end{aligned} \right\} (14,5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} U_v &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Theta_v(z, k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \\ W_v &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_v(z, k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \end{aligned} \right\} (15,5)$$

при условии, что функции  $\Theta_v$  и  $T_v$  определяются следующими равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{b}{2k} \left\{ \tau_1^0(k, \zeta) \frac{\text{sh} [(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}]}{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{2+\zeta^2} \tau_2^0(k, \zeta) \text{ch} [(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}] \right\}, \\ T_1 &= \frac{b}{2k} \left\{ -\tau_1^0(k, \zeta) \text{ch} [(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}{2+\zeta^2} \tau_2^0(k, \zeta) \text{sh} [(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}]; \right\} \end{aligned} \right\} (16,5)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_2 &= F_1 \left\{ (2+\zeta^2) p_1(z) \frac{C}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} (2+\zeta^2) p_2(z) \frac{D}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} \right\}, \\ T_2 &= F_1 \left\{ \frac{(2+\zeta^2)^2}{2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} q_2(z) \frac{C}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} - \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} q_1(z) \frac{D}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} \right\}; \end{aligned} \right\} (16,5)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_3 &= F_2 \left\{ p_1(z) \frac{A}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} p_2(z) \frac{B}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} \right\}, \\ T_3 &= F_2 \left\{ \frac{2+\zeta^2}{2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} q_2(z) \frac{A}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}{2+\zeta^2} q_1(z) \frac{B}{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} \right\}. \end{aligned} \right\} (16,5)$$

Заметим, что в формулах (16,5) функции  $\tau_1^0(k, \zeta)$  и  $\tau_2^0(k, \zeta)$  имеют значения из (18,2), функции  $F_1$  и  $F_2$  определяются по (22,2), а функции  $p_1(z)$ ,  $p_2(z)$ ,  $q_1(z)$  и  $q_2(z)$  даются формулами (10,5).

Если сравнить формулы (16,5) с (9,5), то можно сразу же убедиться в том, что функции  $u_3(x, z, t)$  и  $w_3(x, z, t)$  из (14,5) отличаются от функций  $u(x, z, t)$  и  $w(x, z, t)$  из (7,5) только заменой множителя  $f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)$  в (9,5) на множитель  $F_2$  из (22,2). Поэтому исследование функций  $u_3$  и  $w_3$  можно будет производить в точности так же, как мы будем исследовать функции (7,5). Функции  $u_2(x, z, t)$  и  $w_2(x, z, t)$ , определяющиеся по (14,5), (15,5) и (16,5), имеют структуру, весьма близкую к структуре функций  $u_3$  и  $w_3$ . Это обстоятельство мы также будем учитывать при выполнении исследований.

Что же касается функций  $u_1$  и  $u_2$ , определяющихся формулами (14,5), (15,5) и (16,5), то их структура близка к структуре формул (14,2) и (15,2), определяющих первое слагаемое  $\vec{u}_0$  в формуле (20,2) для суммарного вектора смещений в нашей задаче. Вследствие этого целесообразно объединить составляющие векторов  $\vec{u}_0$  и  $\vec{u}_1$  общими формулами. Производя указанное объединение и пользуясь (18,2), мы получаем формулы

$$\left. \begin{aligned} u_0 + u_1 &= \frac{1}{b\mu} \int_0^{k_1} U(z, t, k) \sin kx \, dk, \\ w_0 + w_1 &= \frac{-1}{b\mu} \int_0^{k_1} W(z, t, k) \cos kx \, dk, \end{aligned} \right\} (17,5)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Theta(z, k, \zeta) e^{k\frac{t}{b}\zeta} d\zeta, \\ W &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T(z, k, \zeta) e^{k\frac{t}{b}\zeta} d\zeta, \end{aligned} \right\} (18,5)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Theta = & \left\{ \frac{e^{-(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} - e^{-zk\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}}{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} - \frac{e^{-(h-z)k\sqrt{1+\zeta^2}} - e^{-zk\sqrt{1+\zeta^2}}}{\sqrt{1+\zeta^2}} + \right. \\
 & + \left[ \frac{2+\zeta^2}{2(1+\zeta^2)} \chi(k\sqrt{1+\zeta^2}) - \chi(k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}) \right] \times \\
 & \quad \times \frac{\text{sh}[(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}]}{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} - \\
 & - \frac{2}{2+\zeta^2} \left[ \frac{2+\zeta^2}{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} \chi(k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}) - \right. \\
 & \left. - \frac{\chi(k\sqrt{1+\zeta^2})}{\sqrt{1+\zeta^2}} \right] \text{ch}[(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}] \left. \right\} \frac{f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2k\zeta^2}, \quad (19,5) \\
 T = & \left\{ -2 + e^{-zk\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} + e^{-(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} + \right. \\
 & + \frac{1}{1+\zeta^2} \left[ 2 - e^{-zk\sqrt{1+\zeta^2}} - e^{-(h-z)k\sqrt{1+\zeta^2}} \right] + \\
 & + \left[ \frac{2+\zeta^2}{2(1+\zeta^2)} \chi(k\sqrt{1+\zeta^2}) - \chi(k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}) \right] \times \\
 & \quad \times \text{ch}[(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}] + \\
 & + \frac{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}{2+\zeta^2} \left[ \frac{2+\zeta^2}{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} \chi(k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}) - \right. \\
 & \left. - \frac{\chi(k\sqrt{1+\zeta^2})}{\sqrt{1+\zeta^2}} \right] \text{sh}[(h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}] \left. \right\} \frac{f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)}{2k\zeta^2}.
 \end{aligned}$$

При этом следует иметь в виду, что в (19,5) применено обозначение (19,2)

$$\chi(p) = 1 - e^{-hp},$$

а также, что функция  $f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)$  определяется при помощи (10,2) по заданной объемной плотности (1,2) нормальной силы.

Резюмируя изложенное, приходим к выводу, что для исследования поля смещений задачи из § 2 нам будет достаточно рассмотреть функции (14,5)  $u_0$  и  $w_0$  (при  $\nu=2$  и 3), а также функции  $u_0 + u_1$  и  $w_0 + w_1$  из (17,5) и составить суммы

$$\left. \begin{aligned} U_s(x, z, t) &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = \int_0^{k_1} U_s(z, t, k) \sin kx \, dk, \\ W_s(x, z, t) &= w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = \\ &= \int_0^{k_1} W_s(z, t, k) \cos kx \, dk, \end{aligned} \right\} (20,5)$$

в которых

$$\left. \begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Theta_s(z, k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \\ W_s &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_s(z, k, \zeta) e^{k \frac{t}{b} \zeta} d\zeta, \end{aligned} \right\} (21,5)$$

а  $\Theta_s$  и  $T_s$  являются суммами функций (16<sub>2</sub>,5), (16<sub>3</sub>,5) и (19,5), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Theta_s &= \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta, \\ T_s &= T_2 + T_3 + T. \end{aligned} \right\} (22,5)$$

Такое рассмотрение мы произведем в конце § 7. В заключение же настоящего параграфа полезно сделать ряд замечаний, необходимых для нижеследующего.

Если воспользоваться формулами (24,1), (25,1) и (10,5), то легко можно убедиться в том, что выражения, стоящие в фигурных скобках (16<sub>3</sub>,5), не имеют других особенностей, кроме корней характеристических уравнений  $L_\nu = 0$ . Особыми же точками функций  $\Theta_3$  и  $T_3$  оказываются упомянутые корни, а также особые точки функции  $F_2$  из (22,2) и (18,2). Последняя же имеет лишь точки разветвления  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$ , а также особые точки функции  $f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)$ , определяемой формулой (10.2) по заданному внешнему воздействию. Наличие точек разветвления следует учитывать при исследовании по теореме о вычетах интегралов (15,5).

Совершенно так же из формул (24,1), (25,1) и (10,5) следует, что выражения, стоящие в фигурных скобках (16<sub>2,5</sub>), имеют особенности (полюсы первого порядка) лишь в корнях характеристических уравнений. При этом заметим, что вторые слагаемые скобок остаются конечными (и неравными нулю) при  $2 + \zeta^2 = 0$ . Функция же  $F_1$  из (22,2) и (18,2), стоящая множителем при скобках (16<sub>2,5</sub>), имеет точки разветвления  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$ , а также имеет особенности в особых точках функции  $f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)$  из (10,2) и полюсы первого порядка в точках  $\zeta = \pm i\sqrt{2}$ . Поэтому функции  $\Theta_2$  и  $T_2$  из (16<sub>2,5</sub>) будут иметь особенности в корнях характеристических уравнений, в особых точках функции  $f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)$ , в точках  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$  и, наконец, в точках  $\zeta = \pm i\sqrt{2}$ . Нужно подчеркнуть, что появление особых точек  $\zeta = \pm i\sqrt{2}$  в функциях  $\Theta_2$  и  $T_2$  носит случайный характер и является лишь следствием нашего разбиения функций  $\Theta_s$  и  $T_s$  на слагаемые (22,5). При составлении же сумм  $\Theta_2 + \Theta$  и  $T_2 + T$  эти особенности уничтожаются.

Наконец, из формул (18,2) следует, что функции  $\Theta_1$  и  $T_1$  из (16<sub>1,5</sub>) имеют особенности в особых точках  $f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right)$ , а также имеют точки разветвления  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$  и полюсы первого порядка в точках  $\zeta = \pm i\sqrt{2}$ . Если воспользоваться формулами (16<sub>1,5</sub>), (16<sub>2,5</sub>), (22,2), (24,1) и (25,1), то не представит труда убедиться в том, что в суммах  $\Theta_1 + \Theta_2$  и  $T_1 + T_2$  особенности при  $\zeta = \pm i\sqrt{2}$  взаимно сокращаются. Это обстоятельство позволит нам в нижеследующем (при применении теоремы о вычетах) точки  $\zeta = \pm i\sqrt{2}$  оставлять без внимания.

### § 6. О корнях характеристического уравнения

В предыдущем параграфе было установлено, что особые точки подинтегральных функций в интегралах (8,5) определяются из решения характеристического уравнения

$$\Delta_0(k, \zeta) = 0,$$

все корни которого расположены на мнимой оси плоскости<sup>1</sup>  $\zeta$ . Если учесть обозначения

$$\alpha = hk\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}; \quad \beta = hk\sqrt{1+\zeta^2}, \quad (1,5)$$

а также формулы (2,5) и (3,5), то легко усмотреть, что характеристическое уравнение распадается на два уравнения

$$L_1 = (2 + \zeta^2)^2 \operatorname{th} \frac{\beta}{2} - 4\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} = 0; \quad (1,6)$$

$$L_2 = (2 + \zeta^2)^2 \operatorname{cth} \frac{\beta}{2} - 4\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} = 0, \quad (2,6)$$

определяющие, соответственно, частоты  $\nu = -i\zeta$  симметричных и антисимметричных относительно срединной плоскости колебаний слоя<sup>[3]</sup>.

Теперь нам следует коротко остановиться на исследовании корней предыдущих уравнений. Упомянутые исследования можно было бы производить при любых значениях величины  $hk$ . Но, как будет видно из нижеследующего, в нашей задаче оказываются существенными лишь значения  $hk \ll 1$ . Поэтому рассмотрим случай малых значений  $hk$ , а относительно общего случая ограничимся лишь небольшим замечанием.

1. Обратимся сначала к уравнению (1,6) и произведем деление корней этого уравнения на два класса. К первому классу отнесем корни, удовлетворяющие следующим неравенствам

$$\frac{hk}{2} \left| \sqrt{1+\zeta^2} \right| \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{kh}{2} \left| \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \right| \ll 1, \quad (3,6)$$

а ко второму классу будем относить все прочие уравнения (1,6), для которых (3,6) не имеет места. Если учесть сделанное предположение о наличии соотношения

$$hk \ll 1, \quad (4,6)$$

то нетрудно убедиться в том, что все корни второго класса оказываются весьма большими по абсолютному значению, т. е.

$$|\zeta| \gg 1. \quad (5,6)$$

<sup>1</sup> Некоторые исследования предыдущего уравнения производились Релеем<sup>[3]</sup>, Лембом<sup>[4]</sup> и Гоголадзе<sup>[5]</sup>.

Для приближенного определения корней первого класса воспользуемся разложением

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots$$

и представим уравнение (1,6) в виде

$$L_1 \equiv \frac{hk}{2} \sqrt{1+\zeta^2} \left\{ (2+\zeta^2)^2 \left[ 1 - \frac{h^2 k^2}{12} (1+\zeta^2) + \dots \right] - 4(1+\gamma^2 \zeta^2) \left[ 1 - \frac{h^2 k^2}{12} (1+\gamma^2 \zeta^2) + \dots \right] \right\} = 0,$$

откуда получается

$$\zeta^2 \sqrt{1+\zeta^2} \left\{ \zeta^2 + 4(1-\gamma^2) - \frac{h^2 k^2}{12} \times \right. \\ \left. \times [8(1-\gamma^2) + (5-4\gamma^4)\zeta^2 + \zeta^4] + \dots \right\} = 0.$$

Исключая из рассмотрения несущественные корни  $\zeta=0$  и  $\zeta=\pm i$  первого класса [в которых подинтегральные функции (в 8,5) остаются регулярными], мы убеждаемся в том, что существуют еще только два интересующих нас корня, представляющиеся формулами

$$\zeta_2 = \pm i \tau_2, \quad (6,6)$$

где

$$\tau_2 = 2 \sqrt{1-\gamma^2} \left\{ 1 - \frac{h^2 k^2}{24} [1-4\gamma^2(1-\gamma^2)] + \dots \right\}.$$

Других корней первого класса уравнение (1,6) не имеет.

Для нижеследующего полезно будет заметить, что в окрестности точек  $\zeta_2 = \pm i \tau_2$ , равно как и во всех точках  $\zeta$ , удовлетворяющих неравенству  $|\zeta^2| h^2 k^2 \ll 1$ , выражение  $L_1(k, \zeta)$  может быть представлено формулой

$$L_1(k, \zeta) = \frac{hk}{2} \zeta^2 \sqrt{1+\zeta^2} (\zeta^2 - \zeta_2^2) \times \\ \times [1 + h^2 k^2 (\zeta^2 - \zeta_2^2) \varphi_2(\zeta, hk)], \quad (7,6)$$

в которой регулярную функцию  $\varphi_2(\zeta, hk)$ , сравнимую по модулю с единицей в точках, удовлетворяющих (3,6), нетрудно было бы оценить. Приближенным соотношением (7,6) нам придется еще пользоваться.

Что же касается корней уравнения (1,6), принадлежащих ко второму классу, то для них оказывается выполненным неравенство (5,6). Это сразу же позволяет утверждать, что такие корни удовлетворяют, по крайней мере, одному из условий

$$\frac{hk}{2} \left| \sqrt{1 + \zeta^2} \right| \approx m \pi,$$

$$\frac{hk}{2} \left| \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \right| \approx \frac{2n+1}{2} \pi,$$

в которых  $n$  и  $m$  являются целыми числами. Пользуясь предыдущими условиями, а также применяя разложения в ряды функций, входящих в уравнение (1,6), легко можно установить приближенные значения всех корней второго класса. Не будем останавливаться здесь на несложных вычислениях, с которыми можно познакомиться по нашей другой работе<sup>1)</sup>, а формулируем лишь окончательные результаты.

Предполагая, что число  $\gamma$  из (23,1) представляется в виде несократимой дроби<sup>1</sup>

$$\gamma = \frac{2n_0 + 1}{2m_0} < 1, \quad (8,6)$$

можно без труда убедиться в том, что корни второго класса уравнения (1,6) распадаются на три различных типа.

К первому типу интересующих нас корней относятся корни уравнения (1,6), представимые в виде

$$\zeta_n = \pm i \tau_n, \quad \tau_n = \frac{2n+1}{\gamma hk} \pi + O(hk), \quad (9,6)$$

при условии, что целое положительное число  $n$  может принимать все значения кроме тех, которые содержатся в формуле

$$n' = n_0(2q + 1) + q \quad (10,6)$$

при целом  $q \geq 0$ .

Ко второму типу корней второго класса уравнения (1,6) относятся корни, представляющиеся в виде

$$\zeta_m = \pm i \tau_m; \quad \tau_m = \frac{2m}{hk} \pi + O(hk), \quad (9,6)$$

<sup>1</sup> Что, конечно, ни в какой мере не ограничивает общности в постановке нашей динамической задачи.

где целое число  $m$  принимает все значения, за исключением тех, которые содержатся в формуле

$$m' = m_0(2_q + 1) \quad (10_2, 6)$$

при целом  $q \geq 0$ . И, наконец, к третьему типу наших корней отнесем все остальные уравнения (1,6). Эти корни определяются формулами

$$\zeta_q = \pm \tau_q, \quad \tau_q = \frac{2m'}{hk} \pi \pm O(hk), \quad (9_3, 6)$$

в которых целое число  $m'$  имеет значение из (10<sub>2</sub>,6).

2. Перейдем теперь к рассмотрению корней уравнения (2,6), причем попрежнему будем сохранять разделение упомянутых корней на два класса.

Не представляло бы труда убедиться в том, что кроме несущественного корня  $\zeta = 0$  уравнение (2,6) имеет еще лишь два корня  $\zeta_1 = \pm i\tau_1$ , принадлежащие к первому классу. Чтобы получить приближенные представления последних корней, введем временные обозначения

$$x = \frac{hk}{2}; \quad b = \sqrt{1 - \tau^2} \quad \text{и} \quad a = \sqrt{1 - \gamma^2 \tau^2}$$

и положим в (2,6)  $\zeta = \pm i\tau$ . Тогда последнее уравнение примет вид

$$L_2 \equiv \frac{1}{(e - e^{-bx})(e^{ax} - e^{-ax})} \left\{ (2 - \tau^2)^2 (e^{ax} - e^{-ax})(e^{bx} + e^{-bx}) - 4ab(e^{bx} - e^{-bx})(e^{ax} + e^{-ax}) \right\} = 0$$

и легко решается путем разложения в ряды по степеням  $ax$  и  $bx$ . Упомянутые разложения приводят к равенству

$$L_2 \equiv \frac{\tau^2 [bx]^{-1}}{\left[ 1 + \frac{a^2 + b^2}{3!} x^2 + \dots \right]} \left[ \tau^2 - \frac{4}{3} x^2 (1 - \gamma^2) + \frac{4}{3} x^2 \tau^2 (1 - \gamma^2) + \frac{2}{3} x^2 \tau^2 - \frac{4}{15} x^4 (1 - \gamma^2) + O(x^6 + \tau^6) \right] = 0,$$

из которого, в первом приближении, получается

$$\tau_1^2 \approx \frac{4}{3} (1 - \gamma^2) x^2.$$

Пользуясь же последней формулой, находим для второго приближения соотношение

$$\tau_1^2 = \frac{4}{3}(1 - \gamma^2)x^2 \left\{ 1 - \left( \frac{9}{5} - \frac{4}{3}\gamma^2 \right)x^2 + \dots \right\},$$

из которого вытекает и окончательный результат

$$\tau_1 = hk \sqrt{\frac{1 - \gamma^2}{3}} \left\{ 1 - \left( \frac{9}{10} - \frac{2}{3}\gamma^2 \right) \frac{h^2 k^2}{4} + \dots \right\}. \quad (11,6)$$

Следует отметить, что корни

$$\zeta_1 = \pm i \tau_1 \quad (12,6)$$

характеристического уравнения играют первостепенную роль в нашей задаче. При этом особенно важной оказывается пропорциональность  $\tau_1$  величине  $hk$ . Упомянутая пропорциональность сохраняется лишь при малых значениях  $hk$ , что и заставляет нас предполагать справедливость неравенства (4,6).

В нижеследующем нам понадобится приближенное представление функции  $L_2(k, \zeta)$  из (2,6) в окрестности точек (12,6). Легко можно убедиться в том, что в окрестности корней (12,6), равно как и во всех точках  $\zeta$ , удовлетворяющих неравенству  $|\zeta^2| h^2 k^2 \ll 1$ , справедлива приближенная формула

$$L_2(k, \zeta) = \frac{2}{hk} \frac{\zeta^2}{\sqrt{1 + \zeta^2}} (\zeta^2 - \zeta_1^2) \left[ 1 + (\zeta^2 - \zeta_1^2) h^2 k^2 \varphi_1(\zeta, k) \right], \quad (13,6)$$

в которой  $\varphi_1(\zeta, k)$  обозначает некоторую регулярную функцию, сравнимую по модулю с единицей в точках, удовлетворяющих (3,6), явный вид которой не существует для нижеследующего.

Обращаясь, наконец, к корням второго класса уравнения (2,6), мы заметим, что для них оказывается справедливым неравенство (5,6), позволяющее производить исследования совершенно так же, как исследуется уравнение (1,6). При этом легко можно было бы убедиться в том, что, с точностью до поправочных членов вида  $O(hk)$  (которые мы не выписывали явным образом), интересующие нас корни снова представляются формулами (9<sub>1</sub>,6), (9<sub>2</sub>,6) и (9<sub>3</sub>,6). Не останавливаясь на доказательстве высказанного утверждения (представляющегося почти очевидным)<sup>[1]</sup>, мы сформулируем некоторые результаты исследования корней уравнений (1,6) и (2,6) в случае любых значений  $hk$ .

3. Для нижеследующего окажется вполне достаточным знать лишь устанавливаемую путем численных расчетов графическую зависимость функций  $\varphi_n(k) = k\tau_n(k)$  [в которых  $\tau_n(k)$  определяется по корням  $\zeta_n = \pm i\tau_n(k)$  уравнений (1,6) и (2,6)] от волнового числа  $k$ .

При этом значком  $n$  в выражениях  $\tau_n(k)$  мы распределимся так, чтобы  $\tau_1(k)$  определяло наименьшие корни  $\zeta_1 = \pm i\tau_1$  уравнения (2,6), чтобы  $\tau_2(k)$  определяло наименьшие корни  $\zeta_2 = \pm i\tau_2$  (отличные от нуля и  $\pm i$ ) уравнения (1,6) и, наконец, чтобы  $\zeta_n = \pm i\tau_n$  определяло (при соответствующих значениях  $n \geq 3$ ) все прочие корни упоминавшихся уравнений.

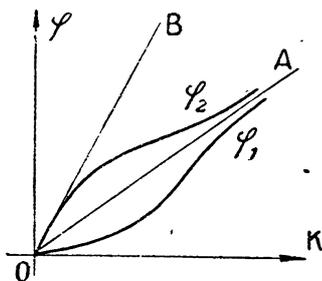


Рис. 1

Зависимость функций  $\varphi_1(k)$  и  $\varphi_2(k)$  от переменной  $k$  может быть установлена путем численных расчетов<sup>1</sup> и иллюстрируется кривыми на рис. 1.

На этом рисунке построены вспомогательные прямые  $OB$  и  $OA$  так, что  $\operatorname{tg} \angle BOk = 2\sqrt{1-\gamma^2}$  и  $\operatorname{tg} \angle AO k = \vartheta$ . Кривая  $\varphi_2 = k\tau_2(k)$  касается прямой  $OB$  при  $k=0$ , а при  $k \rightarrow \infty$  асимптотически приближается к прямой  $OA$ . Кривая же  $\varphi_1 = k\tau_1(k)$  при  $k=0$  касается оси абсцисс, а при  $k \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к совпадению с прямой  $OA$ . Существенным является то обстоятельство, что

не существует другого промежутка  $\Delta k$ , кроме промежутка, прилегающего к началу координат, в котором какая-либо из функций  $\varphi_n(k)$  оказалась бы пропорциональной величине  $k^2$ . Такое же заключение остается справедливым и по отношению к кривым  $\varphi = \varphi_n(k)$ , при  $n \geq 3$ , построенным на рис. 2. Все эти кривые начинаются при

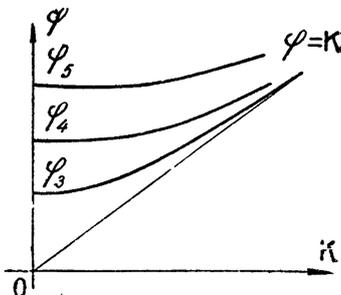


Рис. 2

<sup>1</sup> Некоторые из таких расчетов были выполнены еще Лембом [4].

<sup>2</sup> Заметим, что величина  $\vartheta$  определяет корни  $\zeta = \pm i\vartheta$  уравнения Релея

$$(2 + \zeta^2)^2 - 4\sqrt{1 + \gamma^2\zeta^2}\sqrt{1 + \zeta^2} = 0$$

в случае полупространства. Нетрудно было бы убедиться в том, что уравнения (1,6) и (2,6) переходят в указанное уравнение, если  $k \rightarrow \infty$ .

$k=0$  от значений  $\varphi_n^0 > 0$  и имеют в точке  $k=0$  касательные, параллельные оси абсцисс. При стремлении же  $k \rightarrow \infty$  эти кривые асимптотически приближаются к прямой  $\varphi = k$ .

Более подробно на обсуждаемом вопросе нам нет необходимости задерживаться.

*§ 7. Исследование решений задач о слое в случае медленно изменяющихся плавно распределенных нормальных воздействий*

1. Предположим сначала, что поверхностная нормальная сила, действующая на плоский упругий слой, представляется первой формулой (8,1) при условии, что

$$\tau_2(t, k) = c(k, \omega) e^{i\omega t}, \quad (1,7)$$

где  $c(k, \omega)$  является произвольной непрерывной функцией от  $k$  и  $\omega$ . Тогда компоненты поля упругих смещений задачи из § 1 можно будет определять по формулам (7,5) и (8,5), если в выражениях (9,5) положить

$$f_2\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right) = c(k, \omega) \frac{b}{k\left(\zeta - i\frac{b\omega}{k}\right)}. \quad (2,7)$$

Чтобы получить подходящие для наших целей выражения функций  $u(x, z, t)$  и  $w(x, z, t)$ , нужно произвести вычисление интегралов (8,5) по теореме о вычетах. При этом получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + U_1 + U_2 + \sum_{r=3}^{\infty} U_r, \\ W &= W_0 + W_1 + W_2 + \sum_{r=3}^{\infty} W_r, \end{aligned} \right\} (3,7)$$

в которых  $U_0$  и  $W_0$  обозначают вычеты подинтегральных выражений в (8,5) в полюсе  $\zeta_0 = i\tau_0 = i\frac{b\omega}{k}$ ;  $U_\nu$  и  $W_\nu$  (при  $\nu = 1, 2$ ) обозначают попарные суммы вычетов в наименьших корнях  $\zeta_1 = \pm i\tau_1$  и  $\zeta_2 = \pm i\tau_2$  характеристического уравнения [представляющихся при малых значениях  $hk$  формулами (6,6) и (12,6)] и, наконец, слагаемые  $\sum_{r=3}^{\infty} U_r$  и  $\sum_{r=3}^{\infty} W_r$  обо-

значают суммы вычетов подинтегральных функций (8,5) во всех остальных корнях характеристического уравнения.

Наша задача теперь должна заключаться в вычислении и оценке слагаемых правых частей (3,7). Интересующие же нас поля смещений получатся в результате подстановки выражений (3,7) в формулы (7,5).

Исследования правых частей (3,5) удобно начать с рассмотрения первых трех слагаемых. При этом будем считать, что имеют место неравенства (16,4), и при таком предположении произведем необходимые вычисления.

Позднее же обсудим вопрос о роли неравенств (16,4) в наших исследованиях.

2. Нетрудно видеть, что если справедливо (16,4), то для значений  $\zeta$ , меньших или сравнимых по модулю с наибольшим из чисел  $|\zeta_0|$ ,  $|\zeta_1|$  и  $|\zeta_2|$ , будут выполняться неравенства

$$\left| \frac{\alpha}{2} \right| \equiv \left| \frac{hk}{2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \right| \ll 1; \quad \left| \frac{\beta}{2} \right| \equiv \left| \frac{hk}{2} \sqrt{1 + \zeta^2} \right| \ll 1.$$

Из последних же неравенств, а также из (5,5) и (10,5) вытекают приближенные соотношения

$$\begin{aligned} & \operatorname{sh} [(h-z)k \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}] = \\ & = (h-z)k \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} [1 + O(|\beta^2|)], \\ & \dots \dots \dots \\ & \operatorname{ch} [(h-z)k \sqrt{1 + \zeta^2}] = 1 + O(|\beta^2|), \\ & \frac{A(k, \zeta)}{\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} = \frac{hk \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}{2\zeta^2 (\zeta^2 - \zeta_2^2)} \times \\ & \times [1 + O(|\beta^2|)] - \frac{2 [1 + O(|\beta^2|)]}{hk \zeta^2 \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} (\zeta^2 - \zeta_1^2)}, \quad (4,7) \\ & \frac{B(k, \zeta)}{\sqrt{1 + \zeta^2} \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} = \sqrt{\frac{1 + \gamma^2 \zeta^2}{1 + \zeta^2}} \times \\ & \times \frac{1 + O(|\beta^2|)}{\zeta^2 (\zeta^2 - \zeta_2^2)} - \sqrt{\frac{1 + \zeta^2}{1 + \gamma^2 \zeta^2}} \times \\ & \times \frac{1 + O(|\beta^2|)}{\zeta^2 (\zeta^2 - \zeta_1^2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_1(z) &= (h-z)k\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\frac{\zeta^2}{2}\times \\
 &\quad \times [1+O(|\beta^2|)], \\
 p_2(z) &= -\frac{\zeta^2}{2+\zeta^2}[1+O(|\beta^2|)], \\
 q_1(z) &= (h-z)k\sqrt{1+\zeta^2}\times \\
 &\quad \times \frac{\zeta^2(1-2\gamma^2)}{2}[1+O(|\beta^2|)], \\
 q_2(z) &= \frac{\zeta^2}{2+\zeta^2}[1+O(|\beta^2|)],
 \end{aligned}
 \tag{5,7}$$

позволяющие без труда вычислить все интересующие нас вычеты.

Обратимся к формулам (8,5) и (9,5). В § 6 мы видели, что функции  $\Theta$  и  $T$  имеют особенности лишь в точках  $\zeta_0 = i\frac{\omega b}{k}$ ;  $\zeta_1 = \pm i\tau_1$ ;  $\zeta_2 = \pm i\tau_2$ , а также во всех „больших по модулю“ корнях  $\zeta_n$  характеристического уравнения. Последние же представляются формулами (9,6) и, в предположении (16,4), удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|\zeta_0| \ll |\zeta_n| \text{ и } |\zeta_1| < |\zeta_2| \ll |\zeta_n|.$$

Построим контур  $(l)$ , охватывающий участок мнимой оси с точками  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ , и не содержащий внутри себя других корней характеристического уравнения. Тогда первые три слагаемых формул (3,7) представляются следующими интегралами:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \Theta(z, k, \zeta) e^{k\frac{t}{b}\zeta} d\zeta; \\
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} T(z, k, \zeta) e^{k\frac{t}{b}\zeta} d\zeta.
 \end{aligned}
 \tag{6,7}$$

Для приближенного вычисления последних интегралов удобно обратиться к формулам (4,7) и (5,7) и произвести

естественное преобразование подинтегральных функций. Упомянутые преобразования приводят сначала к формулам

$$\Theta = \frac{bc(k, \omega)}{k \left( \zeta - i \frac{b \omega}{k} \right)} \left\{ -\frac{h-z}{h} \frac{1}{\zeta^2 - \zeta_1^2} - \frac{\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2}}{2+\zeta^2} \times \right.$$

$$\times \left[ \sqrt{\frac{1+\gamma^2 \zeta^2}{1+\zeta^2}} \frac{1}{\zeta^2 - \zeta_2^2} - \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{1+\gamma^2 \zeta^2}} \cdot \frac{1}{\zeta^2 - \zeta_1^2} \right] \left[ 1 + O(|\beta^2|) \right],$$

$$T = \frac{bc(k, \omega)}{k \left( \zeta - i \frac{b \omega}{k} \right)} \left\{ \frac{-1}{hk (\zeta^2 - \zeta_1^2)} + \frac{\sqrt{1+\gamma^2 \zeta^2} \sqrt{1+\zeta^2} (1-2\gamma^2) (h-z) k}{2+\zeta^2} \times \right.$$

$$\times \left[ \sqrt{\frac{1+\gamma^2 \zeta^2}{1+\zeta^2}} \cdot \frac{1}{\zeta^2 - \zeta_2^2} - \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{1+\gamma^2 \zeta^2}} \frac{1}{\zeta^2 - \zeta_1^2} \right] \left[ 1 + O(|\beta^2|) \right].$$

Если же, затем, воспользоваться приближенным соотношением

$$\sqrt{\frac{1+\gamma^2 \zeta^2}{1+\zeta^2}} \frac{1}{\zeta^2 - \zeta_2^2} - \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{1+\gamma^2 \zeta^2}} \frac{1}{\zeta^2 - \zeta_1^2} =$$

$$= -(1-\gamma^2) \sqrt{\frac{1+\zeta^2}{1+\gamma^2 \zeta^2}} \cdot \frac{(2+\zeta^2)^2}{1+\zeta^2} \cdot \frac{1+O(|\beta^2|)}{(\zeta^2 - \zeta_2^2)(\zeta^2 - \zeta_1^2)},$$

получаемым при учете формул (6,6) и (12,6), то подинтегральные функции [во всех точках на контуре ( $l$ ), а также внутри его] представляются в следующем окончательном виде:

$$\Theta = \frac{bc(k, \omega)}{k \left( \zeta - i \frac{b \omega}{k} \right)} \left[ \frac{z-h}{h} \frac{1}{\zeta^2 - \zeta_1^2} + \frac{(1-\gamma^2)(2+\zeta^2)}{(\zeta^2 - \zeta_2^2)(\zeta^2 - \zeta_1^2)} \right] \left[ 1 + O(|\beta^2|) \right],$$

$$T = \frac{bc(k, \omega)}{k \left( \zeta - i \frac{b \omega}{k} \right)} \left\{ \frac{-1}{hk (\zeta^2 - \zeta_1^2)} - \frac{(1-\gamma^2)(1-2\gamma^2)(h-z)k}{(\zeta^2 - \zeta_1^2)(\zeta^2 - \zeta_2^2)} \right\} \times$$

$$\times \left[ 1 + O(|\beta^2|) \right].$$

Пользуясь формулами (6,7) и (7,7), получаем для вычетов в точке  $\zeta_0 = i\tau_0 = i \frac{\omega b}{k}$  значения

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= \frac{bc(k, \omega)}{k} \left\{ \frac{(1-\gamma^2)(2-\tau_0^2)}{(\tau_2^2-\tau_1^2)(\tau_0^2-\tau_2^2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a(z)}{\tau_0^2-\tau_1^2} \right\} [1 + O(|\beta^2|)] e^{i\omega t}, \\ W_0 &= \frac{bc(k, \omega)}{k} \left\{ \frac{1}{hk(\tau_0^2-\tau_1^2)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(h-z)k(1-\gamma^2)(1-2\gamma^2)}{(\tau_2^2-\tau_1^2)(\tau_0^2-\tau_2^2)} \right\} [1 + O(|\beta^2|)] e^{i\omega t}, \end{aligned} \right\} (8,7)$$

в которых

$$a(z) = \frac{h-z}{h} - \frac{(1-\gamma^2)(2-\tau^2)}{(\tau_2^2-\tau_1^2)}. \quad (9,1,7)$$

Для сумм вычетов в точках  $\zeta_1 = \pm i\tau_1$  находим

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{c(k, \omega)}{2\tau_1} b(z) \left[ \frac{e^{-ik\frac{t}{b}\tau_1}}{\frac{k}{b}\tau_1 - \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-ik\frac{t}{b}\tau_1}}{\frac{k}{b}\tau_1 + \omega} \right] [1 + O(|\beta^2|)], \\ W_1 &= \frac{c(k, \omega)}{2hk\tau_1} \left[ \frac{e^{ik\frac{t}{b}\tau_1}}{\frac{k}{b}\tau_1 - \omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-ik\frac{t}{b}\tau_1}}{\frac{k}{b}\tau_1 + \omega} \right] [1 + O(|\beta^2|)], \end{aligned} \right\} (10,7)$$

где

$$b(z) = \frac{h-z}{h} - \frac{(1-\gamma^2)(2-\tau_1^2)}{\tau_2^2-\tau_1^2}. \quad (9,2,7)$$

Наконец, для сумм вычетов в точках  $\tau_2 = \pm i\tau_2$  получается следующий результат:

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \frac{c(k, \omega)(1-\gamma^2)(2-\tau_2^2)}{2\tau_2(\tau_2^2-\tau_1^2)} \left[ \frac{e^{ik\frac{t}{b}\tau_2}}{\frac{k}{b}\tau_2-\omega} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-ik\frac{t}{b}\tau_2}}{\frac{k}{b}\tau_2+\omega} \right] \times [1 + O(|\beta^2|)], \\
 W_2 &= -\frac{c(k, \omega)(h-z)k(1-\gamma^2)(1-2\gamma^2)}{2\tau_2(\tau_2^2-\tau_1^2)} \left[ \frac{e^{ik\frac{t}{b}\tau_2}}{\frac{k}{b}\tau_2-\omega} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-ik\frac{t}{b}\tau_2}}{\frac{k}{b}\tau_2+\omega} \right] [1 + O(|\beta^3|)].
 \end{aligned} \tag{11,7}$$

Нам остается лишь воспользоваться формулами (6,6), (11,6), (12,6) и представить первые три слагаемых в (3,7) окончательными выражениями.

Для этой цели обозначим

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{b}{h} \sqrt{\frac{3}{1-\gamma^2} \left\{ 1 - \left( \frac{9}{10} - \frac{2}{3}\gamma^2 \right) \frac{h^2k^2}{4} + \dots \right\}^{-1}}, \\
 q &= \rho_0 \frac{4(1-\gamma^2)}{b^2} \left\{ 1 - \frac{h^2k^2}{12} [1 - 4\gamma^2(1-\gamma^2)] + \dots \right\}
 \end{aligned} \tag{12,7}$$

и перепишем (6,6) и (11,6) в виде

$$\tau_2^2 = b^2 \frac{q}{\rho_0}; \quad \tau_1 = \frac{kb}{p}.$$

Тогда для сумм первых трех слагаемых в (3,7) получаем окончательные формулы

$$\left. \begin{aligned}
 U_0 + U_1 + U_2 &= S_0 + S_1, \\
 W_0 + W_1 + W_2 &= R_0 + R_1,
 \end{aligned} \right\} \tag{13,7}$$

в которых  $S_0$  и  $R_0$  имеют следующие значения:

$$S_0 = - \frac{bc(k, \omega) (1 - \gamma^2) (2 - \tau_2^2)}{k (\tau_2^2 - \tau_1^2) (\tau_2^2 - \tau_0^2)} e^{i\omega t} + U_2 =$$

$$= Akc(k, \omega) \left[ \frac{e^{i\omega t}}{k^2 \frac{q}{\rho_0} - \omega^2} - \frac{e^{ik\sqrt{\frac{b}{\rho_0}} t}}{2\sqrt{\frac{b}{\rho_0}} k (k\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} - \omega)} - \frac{e^{-ik\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} t}}{2\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} k (k\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} + \omega)} \right] [1 + O(|\beta^2|)], \quad (14,7)$$

$$S_1 = \frac{bc(k, \omega) (1 - \gamma^2) (2 - \tau_2^2)}{k (\tau_2^2 - \tau_1^2) (\tau_2^2 - \tau_0^2)} e^{i\omega t} + U_0 + U_1 =$$

$$= c(k, \omega) \left\{ - \frac{b(1 - \gamma^2) e^{i\omega t}}{k (\tau_2^2 - \tau_1^2)} + \frac{b}{k} \cdot \frac{a(z) - b(z)}{\tau_0^2 - \tau_1^2} e^{i\omega t} + \right.$$

$$\left. + \frac{bb(z)}{k (\tau_0^2 - \tau_1^2)} e^{i\omega t} + U_1 \right\} = -c(k, \omega) b(z) \times$$

$$\times \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{\frac{b}{k} \left( \frac{k^2}{b^2} \tau_1^2 - \omega^2 \right)} - \frac{e^{ik\frac{\tau_1}{b}}}{2\tau_1 \left( \frac{k}{b} \tau_1 - \omega \right)} - \frac{e^{-ik\frac{\tau_1}{b} t}}{2\tau_1 \left( \frac{k}{b} \tau_1 + \omega \right)} \right\} [1 + O(|\beta^2|)]; \quad (15,7)$$

$$R_0 = \frac{bc(k, \omega)}{k} \frac{e^{i\omega t}}{hk (\tau_0^2 - \tau_1^2)} + W_1 =$$

$$= -c(k, \omega) \frac{p^2}{hb} \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{k^2 - p^2 \omega^2} - \frac{e^{i\frac{k^2}{p} t}}{2k^2 (k^2 - p \omega)} - \frac{e^{-i\frac{k^2}{p} t}}{2k^2 (k^2 + p \omega)} \right\} [1 + O(|\beta^2|)]; \quad (16,7)$$

$$\begin{aligned}
 R_1 &= -\frac{bc(k, \omega)}{k} \cdot \frac{e^{i\omega t}}{hk(\tau_0^2 - \tau_1^2)} + W_0 + W_2 = \\
 &= kc(k, \omega)(h-z) \frac{(1-\gamma^2)(1-2\gamma^2)}{\tau_2^2 - \tau_1^2} \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{\frac{b}{k} \left( \frac{k^2}{b^2} \tau_2^2 - \omega^2 \right)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{\frac{ik\tau_0}{b}t}}{2\tau_2 \left( \frac{k}{b} \tau_2 - \omega \right)} - \frac{e^{-\frac{ik\tau_0}{b}t}}{2\tau_2 \left( \frac{k}{b} \tau_2 + \omega \right)} \right\} [1 + O(|\beta^2|)], \quad (17,7)
 \end{aligned}$$

при условии, что постоянная  $A$  в (14,7) определяется равенством

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{(1-\gamma^2)(2-\tau_2^2)}{b(\tau_2^2 - \tau_1^2)} = \frac{1-2\gamma^2}{2b} [1 + O(h^2k^2)] = \\
 &= \frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)b} [1 + O(h^2k^2)]. \quad (18,7)
 \end{aligned}$$

3. Теперь полезно сделать ряд замечаний по поводу формул (14,7) — (17,7).

Мы получили упомянутые формулы путем вычисления вычетов подинтегральных функций (8,5) в пяти особых точках  $\zeta_0 = i \frac{b\omega}{k}$ ;  $\zeta_1 = \pm i\tau_1$  и  $\zeta_2 = \pm i\tau_2$ . При таких вычислениях для нас были весьма существенны оба неравенства (16,4). Первое неравенство позволило употреблять формулы (6,6), (9,6) и (11,6); второе же неравенство обеспечивало малость относительных погрешностей в формулах (4,7), (5,7) и далее. Представляется очевидным [в противном же случае в этом не представило бы труда убедиться путем анализа формул (9,5)], что при невыполнении условий (16,4) суммы вычетов подинтегральных функций (8,5) в особых точках  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  будут выражаться формулами, существенно отличающимися от формул (13,7) — (17,7). В частности, если не будет выполнено первое условие (16,4), то второе и третье слагаемые в (16,7) наверняка не будут содержать множителей<sup>1</sup>  $e^{\pm i \frac{k^2}{p} t}$ . Если же не будет выполнено второе условие (16,4), то относительная погрешность в формулах (14,7) — (17,7) не будет малой. При условиях же (16,4) эта

<sup>1</sup> Последние же, как увидим далее, являются особенно важными в нашем исследовании.

погрешность не превосходит большего из следующих весьма малых чисел

$$h^2 k_1^2 \text{ или } h^2 \omega^2 b^2.$$

Высказанные соображения, а также проводимый далее анализ последних слагаемых в (3,7), позволят нам утверждать, что неравенства (16,4) являются необходимыми и достаточными условиями для справедливости уравнений колебания тонких пластин.

Остановимся теперь коротко на сравнении друг с другом величин  $S_v$  и  $R_v$ , а также результатов

$$\left. \begin{aligned} u_v &= \frac{1}{b\mu} \int_0^{k_1} S_v \sin kx \, dk, \\ w_v &= \frac{-1}{b\mu} \int_0^{k_1} R_v \cos kx \, dk \end{aligned} \right\} (19,7)$$

их подстановки в формулы (7,5). Для этой цели полезно обратить внимание на тождественность структур правых частей (14,7) — (17,7), приводящей, в частности, к соотношениям

$$S_1 \approx hkb(z)R_0; \quad R_1 \approx k(h-z)S_0, \quad (20,7)$$

а также следует учесть особенности вида функции  $b(z)$  из (9,7). Последняя принимает значения порядка единицы, если  $z \neq \frac{h}{2}$ . Если же  $z = \frac{h}{2}$ , то  $b(z)$  принимает значение  $O(h^2 k^2)$ , сравнимое с погрешностью в формулах (14,7) — (17,7). Поэтому во всем нижеследующем мы должны полагать  $b\left(\frac{h}{2}\right) = 0$ .

Рассмотрим сперва функцию  $w_0$  из (19,7), для чего представим ее формулой

$$w_0 = \frac{p_0^2}{\mu h b^2} \int_0^{k_1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 c(k, \omega) \bar{R} \cos kx \, dk, \quad (19,7)$$

шения задачи § 1 (которое мы исследовали) лишь операцией усреднения по переменной  $z$  в формулах (9,5). Это усреднение приводит к замене в (9,5) функций (10,5) выражениями (11,5). Поэтому для исследования усредненных полей можно было бы повторить все предыдущие рассуждения и можно было бы получить все предыдущие результаты с той только разницей, что функции  $a(z)$  и  $b(z)$  из (9,7), входящие в окончательные формулы, оказались бы замененными своими средними значениями. Последние же в точности равны значениям  $a\left(\frac{h}{2}\right)$  и  $b\left(\frac{h}{2}\right)$ .

Итак видим, что главные части первых трех слагаемых формул (3,7), полученные для усредненных по сечению слоя полей смещений задачи § 1, в точности совпадают со значениями упомянутых слагаемых в точках срединной плоскости слоя. При этом легко можно было бы убедиться и в том, что относительные погрешности всех формул остаются в точности прежними. Сформулированный нами сейчас вывод позволит в дальнейшем дать исчерпывающий ответ на соображения, высказанные в п. 3 § 5.

4. Обратимся теперь к вычислению последних слагаемых в формулах (3,7), представляющихся бесконечными суммами вычетов подинтегральных функций из (8,5) во всех остальных корнях характеристического уравнения, за исключением четырех, уже рассмотренных, корней  $\zeta_1 = \pm i\tau_1$  и  $\zeta_2 = \pm i\tau_2$ .

Для этой цели воспользуемся формулами (2,7), (5,5) и представим формулы (9,5) в следующем виде:

$$\Theta = \frac{bc(k, \omega)}{k\left(\zeta - i\frac{b\omega}{k}\right)} \left\{ \frac{p_1(z) \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{\beta}{2} + \sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} p_2(z) \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{L_1(k, \zeta)} - \frac{p_1(z) \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cth} \frac{\beta}{2} + \sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} p_2(z) \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2}}{L_2(k, \zeta)} \right\},$$

$$T = \frac{bc(k, \omega)}{k\left(\zeta - i\frac{b\omega}{k}\right)} \frac{\sqrt{1-\gamma^2\zeta^2}}{2(2+\zeta^2)} \left\{ \frac{(2+\zeta^2)^2 q_2(z) \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{\beta}{2} + 4q_1(z) \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{L_1(k, \zeta)} - \frac{(2+\zeta^2)^2 q_2(z) \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cth} \frac{\beta}{2} + 4q_1(z) \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2}}{L_2(k, \zeta)} \right\}.$$

(23,7)

Не представляет труда убедиться в том, что вычеты подинтегральных функций интегралов (8,5) в любом из корней  $\zeta_n$  уравнений  $L_1=0$  и  $L_2=0$  выразятся, соответственно, первыми и вторыми слагаемыми формул (23,7) при условии, что в этих слагаемых добавлен множитель  $e^{k \frac{t}{b} \zeta_n}$ , выражения  $L_n$  в знаменателях заменены выражениями  $\frac{dL_n}{d\zeta}$  и в этих слагаемых положено  $\zeta = \zeta_n$ .

Чтобы вычислить производные  $\left. \frac{dL_n}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_n}$ , обозначим через  $\zeta_n^{(1)}$  и  $\zeta_n^{(2)}$ , соответственно, корни уравнений (1,6) и (2,6) и учтем приближенные соотношения

$$\left. \begin{aligned} \left[ \zeta^2 \operatorname{th} \frac{\beta}{2} - 4\gamma \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \right] [1 + O(\zeta^{-2})] &= 0, \\ \left[ \zeta^2 \operatorname{cth} \frac{\beta}{2} - 4\gamma \operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} \right] [1 + O(\zeta^{-2})] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (24,7)$$

получающиеся из (1,6) и (2,6), соответственно, при  $\zeta = \zeta_n^{(1)}$  и  $\zeta = \zeta_n^{(2)}$ .

Тогда без труда находим

$$\left. \begin{aligned} \left. \frac{dL_1}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_n^{(1)}} &= \frac{hk}{2} \left[ \zeta_n^{(1)4} - 4\gamma^2 \zeta_n^{(1)2} \operatorname{tg}^2 \left| \frac{\alpha}{2} \right| \right] [1 + O(\zeta_n^{(1)-1})], \\ \left. \frac{dL_2}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_n^{(2)}} &= \frac{hk}{2} \left[ \zeta_n^{(2)4} - 4\gamma^2 \zeta_n^{(2)2} \operatorname{ctg}^2 \left| \frac{\alpha}{2} \right| \right] [1 + O(\zeta_n^{(2)-1})], \end{aligned} \right\} \quad (25,7)$$

и для вычета в одном из корней  $\zeta_n^{(1)}$ , например первого слагаемого подинтегральной функции второго из интегралов (8,5), мы получаем выражение

$$a_{-1} = \frac{b\gamma c(k, \omega) \zeta_n^{(1)4} q_2(z) \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{\beta}{2}}{2k \zeta_n^{(1)} \left[ \frac{dL_1}{d\zeta} \right]_{\zeta=\zeta_n^{(1)}}} e^{k \frac{t}{b} \zeta_n^{(1)}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\zeta_n^{(1)}}\right) \right], \quad (26,7)$$

в котором

$$\begin{aligned}
 q_2(z) &= \operatorname{ch} \left[ (h-z)k \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_n^{(1)2}} \right] - \\
 &- \frac{2}{2 + \zeta_n^{(1)2}} \operatorname{ch} \left[ (h-z)k \sqrt{1 + \zeta_n^{(1)2}} \right] = \\
 &= \operatorname{ch} \left[ (h-z)k \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta_n^{(1)2}} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\zeta_n^{(1)}}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Вычет в точке  $\zeta_n^{(1)}$  второго слагаемого, а также подынтегрального выражения первого из интегралов (8,5) (и, наконец, вычеты в точках  $\zeta_n^{(2)}$  подынтегральных функций обоих интегралов) представляются подобными же формулами, которые нет необходимости выписывать.

Рассмотрим сперва суммы интересующих нас вычетов в предположении, что условия (16,4) имеют место. Если учесть формулы (9,6), определяющие приближенные значения точек  $\zeta_n^{(1)}$  и  $\zeta_n^{(2)}$ , то нетрудно убедиться в справедливости неравенств

$$\left| \zeta_n^{(v)} \right| \gg \left| \frac{b_{v0}}{k} \right|, \quad (27,7)$$

которые, совместно с неравенствами

$$\left| \frac{\operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{\beta}{2}}{\frac{dL_1}{d\zeta}} \right|_{\zeta = \zeta_n^{(1)}} < \frac{2}{\gamma h k |\zeta_n^{(1)}|^4}, \quad \left| \frac{\operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{\frac{dL_1}{d\zeta}} \right|_{\zeta = \zeta_n^{(1)}} < \frac{1}{h k |\zeta_n^{(1)}|^3},$$

$$\left| \frac{\operatorname{cth} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cth} \frac{\beta}{2}}{\frac{dL_2}{d\zeta}} \right|_{\zeta = \zeta_n^{(2)}} < \frac{2}{\gamma h k |\zeta_n^{(2)}|^4}, \quad \left| \frac{\operatorname{cth} \frac{\alpha}{2}}{\frac{dL_2}{d\zeta}} \right|_{\zeta = \zeta_n^{(2)}} < \frac{1}{h k |\zeta_n^{(2)}|^3}$$

легко позволяют оценить последние слагаемые в (3,7).

Действительно, мы без труда получаем оценки

$$\left. \begin{aligned}
 \left| \sum_{r=3}^{\infty} U_r \right| &< |c(k, \omega)| \frac{2(1+\gamma)^2}{\gamma h k} b \sum \frac{1}{\left| \zeta_n - i \frac{\omega b}{k} \right| |\zeta_n|} \sim \\
 &\sim |c(k, \omega)| \frac{2(1+\gamma)^2}{\gamma \pi^2} h b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = |c(k, \omega)| \frac{(1+\gamma)^2}{3\gamma} h b, \\
 \left| \sum_{r=3}^{\infty} W_r \right| &< 2 |c(k, \omega)| \frac{b}{h k^2} \sum \frac{1}{\left| \zeta_n - i \frac{\omega b}{k} \right| |\zeta_n|} \sim \\
 &\sim |c(k, \omega)| \frac{2bh}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = |c(k, \omega)| \frac{hb}{3},
 \end{aligned} \right\} (28,7)$$

которые сразу же позволяют оценить и функции

$$\left. \begin{aligned}
 u_2 &= \frac{1}{b\mu} \int_0^{k_1} \sum_{r=3}^{\infty} U_r \sin kx dk, \\
 w_2 &= \frac{-1}{b\mu} \int_0^{k_1} \sum_{r=3}^{\infty} W_r \cos kx dk,
 \end{aligned} \right\} (29,3)$$

определяющие части полей смещения, соответствующие последним слагаемым в (3,7). Для этих функций мы, во всяком случае, получаем неравенства

$$\left. \begin{aligned}
 |u_2| &< \frac{\max |c(k, \omega)| h k_1}{\mu} \frac{(1+\gamma)^2}{3\gamma}, \\
 |w_2| &< \frac{\max |c(k, \omega)| h k_1}{\mu},
 \end{aligned} \right\} (30,7)$$

из которых видно, что при выполнении условий (16,4) функции  $u_2$  и  $w_2$  оказываются весьма малыми. Полезно отметить, что применение предыдущего метода оценки к составляющим (29,7), усредненным по толщине слоя, приводит нас снова в точности к формулам (30,7). Это замечание следует иметь в виду при обсуждении вопросов, затронутых в п. 3 § 5.

Для выяснения роли условий (16,4) в предыдущих оценках, предположим сперва, что первое условие (16,4) имеет

место, а второе условие оказывается неудовлетворенным. Тогда (27,7) уже не будет иметь места, и разности  $(\zeta_n^{(v)} - i \frac{b\omega}{k})$  смогут принимать весьма малые значения и даже смогут обращаться в нуль, что, как известно, приводит к резонансу. В случае же последнего выражения  $|u_2|$  и  $|\omega_2|$  уже не будут содержать сомножителей  $hk_1$  и не будут малы.

Чтобы иллюстрировать сказанное, предположим, для определенности, что  $\gamma > \frac{1}{2}$ ; рассмотрим расположенный на положительной части мнимой оси корень уравнения  $L_1 = 0$ , представляющийся формулой (9,6) при  $n = 0$  [такой корень будем обозначать символом  $\zeta_3 = i\tau_3$ , где  $\tau_3 = \frac{\pi}{\gamma hk} + O(hk) \approx \frac{\pi}{\gamma hk}$ ] и будем считать, что имеет место резонанс на частоте  $\omega_3 = \frac{k\tau_3}{b} = \frac{\pi}{\gamma bh}$ . Вычислим главную часть (при больших значениях времени  $t$ ) резонансного вычета в точке  $\zeta_3$  второго из интегралов (8,5).

Без труда находим

$$\tilde{a}_{-1} = \left\{ \frac{b \sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}}{2k(2 + \zeta^2)} \left[ \frac{(2 + \zeta)^2 q_2(\zeta) \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{\beta}{2} + 4q_1(\zeta) \operatorname{th} \frac{\alpha}{2}}{\frac{dL_1}{d\zeta}} \right] \right\}_{\zeta = \zeta_3} \times$$

$\times c(k, \omega) \frac{kt}{b} e^{\frac{k}{b} \zeta_3 t}$  + члены, не содержащие множителем  $t$ . Если теперь учесть, что при  $\zeta = i\tau_3$  имеют место соотношения

$$|\zeta| \gg 1, \quad \left| \operatorname{th} \frac{\alpha}{2} \right| \approx \left| \frac{\zeta^2 \operatorname{th} \frac{\beta}{2}}{4\gamma} \right| \approx A_0 |\zeta^2|,$$

$$k \frac{t}{b} \zeta = it \left[ \frac{\pi}{\gamma bh} + O(h^2 k^2) \right] = it \left[ \frac{\pi}{\gamma bh} + B_0 h^2 k^2 + O(h^3 k^3) \right],$$

где  $A_0$  и  $B_0$  — некоторые постоянные, то получаем следующую приближенную формулу:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{-1} &\approx \frac{b q_2(\zeta)}{\zeta_3 h k^2} c(k, \omega) \frac{kt}{b} e^{\zeta \frac{t}{b} \zeta_3} \approx \\ &\approx \frac{\gamma t}{\pi} \cos \left[ \frac{h-z}{h} \pi \right] e^{it \left[ \frac{\pi}{\gamma bh} + B_0 h^2 k^2 + O(h^3 k^3) \right]}. \end{aligned}$$

Непосредственно очевидно, что если подставить во вторую формулу (29,7) вместо  $\sum_{2=3}^{\infty} W_r$  выражение  $\tilde{a}_{-1}$ , то получим резонансное составляющее смещения  $w_2$ , возрастающее с течением времени, приблизительно, пропорционально  $\sqrt{t}$ . Вследствие этого величина  $w_2$  уже не будет малой по сравнению с величиной  $w_0$ , которая, кстати говоря, представляется теперь формулами, отличными от формул, установленных в п.п. 2 и 3 настоящего параграфа.

Итак видим, что второе условие (16,4) является необходимым для того, чтобы смещение  $w_2$  было пренебрежимо малым по сравнению с  $w_0$ .

Совершенно так же необходимым является и первое условие (16,4). Действительно, если бы первое неравенство (16,4) не было выполнено, то мы не смогли бы пользоваться формулами (9,6) для приближенного определения корней  $\zeta_n''$  уравнений (1,6) и (2,6) и эти корни не имели бы значений, больших по абсолютной величине. При этом не представляло бы труда убедиться в том, что вычеты подинтегральных функций (8,5) в наименьших из корней  $\zeta_n^{(v)}$  не отличаются ни в количественном, ни в качественном отношении от вычетов в точках  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ . Вследствие этого обстоятельством составляющими  $u_2$  и  $w_2$  смещения уже нельзя было бы пренебрегать по сравнению с составляющими  $u_0$  и  $w_0$  (которые и сами существенно отличались бы от выражений, встречающихся в теории тонких пластин).

5. Теперь нам следует подвести итоги изложенному. При рассмотрении полей смещений  $u(x, z, t)$  и  $w(x, z, t)$ , представляющихся формулами (7,5), (8,5) и (9,5), мы разбивали эти поля на суммы трех слагаемых

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + u_2, \\ w &= w_0 + w_1 + w_2, \end{aligned} \right\} \quad (31,7)$$

первые два из которых соответствовали вычетам подинтегральных функций из (8,5) в полюсах  $\zeta_0 = i \frac{b\omega}{k}$ ,  $\zeta_1 = \pm i\tau_1$  и  $\zeta_2 = \pm i\tau_2$ , а последние слагаемые определялись по вычетам подинтегральных функций (8,5) во всех остальных особых точках. При вычислении слагаемых формул (31,7) мы предполагали справедливость неравенств (16,4). Это позволило нам получить для  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $w_0$  и  $w_1$  формулы (19,7),

в которых функции  $S$  и  $R$  имели значения из (14,7)—(17,7), а также позволило установить оценочные соотношения (21,7), (22,7) для упомянутых функций и соотношения (30,7) для функций  $u_2$  и  $w_2$ .

Если теперь произвести сопоставление всех упоминавшихся соотношений и предполагать функцию  $c(k, \omega)$  „изменяющейся медленно“ [при таком предположении числа  $\max |c(k, \omega)|$  и  $M_0$  имеют одинаковые порядки величин], то мы сможем переписать формулы (31,7) для точек срединной плоскости слоя следующим окончательным образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x, t) [1 + O(hk_1)], \\ w &= w_0(x, t) \left\{ 1 + O \left[ hk_1 (hb \omega)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (32,7)$$

Из полученных формул вытекает, что при выполнении неравенств (16,4) главными частями полей смещений оказываются функции  $u_0$  и  $w_0$ , определяющиеся по (19,7), (14,7) и (16,7). Не представляло бы труда убедиться в том, что формулы, в точности совпадающие с формулами (32,7), получаются и при исследовании усредненного по толщине слоя поля смещений из п. 3 § 5. Это, в частности, показывает, что одной лишь операции усреднения поля по толщине слоя еще совершенно недостаточно для того, чтобы составляющие  $u_0$  и  $w_0$  оказались главными частями смещений.

В следующем параграфе будет показано, что функции  $u_0$  и  $w_0$  являются решениями уравнений теории колебаний тонких пластин. Вследствие этого предыдущий наш результат будет означать, что условия (16,4) (которым подчинено внешнее воздействие, приложенное к упругому слою) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы из точных уравнений теории упругости для слоя вытекали приближенные уравнения теории тонких пластин. Этому вопросу мы коснемся еще в нижеследующем.

6. В заключение параграфа нам остается рассмотреть задачу из § 2 (или п. 4 § 5), в которой нормальная сила, действующая на слой, предполагалась равномерно распределенной по сечению последнего. При этом, в соответствии с (11,4), а также в соответствии со сказанным в начале настоящего параграфа, будем считать, что функция  $\tau(t, k)$  из (1,2) имеет следующее значение:

$$\tau(t, k) = \frac{c(k, \omega)}{h} e^{i\omega t}.$$

Результат же ее преобразования Лапласа (10,2), входящий в формулы (18,2), будет определяться равенством

$$f\left(\frac{k\zeta}{b}, k\right) = \frac{c(k, \omega)}{h} \frac{b}{k\left(\zeta - i\frac{b\omega}{h}\right)}. \quad (33,7)$$

Для исследования поля смещений в задаче § 2 мы должны изучить функции  $u_s$  и  $w_s$ , представляющиеся интегралами (20,5) и (21,5). Упомянутое изучение начнем в предположении, что условия (16,4) выполнены.

В конце § 5 обсуждался вопрос об особых точках функций  $\Theta_s$  и  $T_s$  из (22,5). В рассматриваемом нами случае упомянутые функции имеют простые полюсы в точках  $\zeta_0 = i\frac{\omega b}{k}$ ;  $\zeta_1 = \pm i\tau_1$ ;  $\zeta_2 = \pm i\tau_2$  и во всех „больших“ по модулю корнях  $\zeta_n$  характеристического уравнения, а также имеют точки разветвления  $\pm i$  и  $\pm \frac{i}{\gamma}$ . Проведем между точками разветвления разрезы  $(l)$ , например по „левым“ полуокружностям, с центрами в начале координат, и разобьем функции (21,5) на пять слагаемых

$$\left. \begin{aligned} U_s &= U_0 + U_1 + U_2 + \sum_{r=3}^{\infty} U_r + U_l, \\ W_s &= W_0 + W_1 + W_2 + \sum_{r=3}^{\infty} W_r + W_l, \end{aligned} \right\} (34,7)$$

первые из которых имеют такой же смысл, как и слагаемые в (3,7), а последние слагаемые представляют собой интегралы (21,5) распространенные по разрезам  $(l)$ . Вычисление и исследование слагаемых формул (34,7) можно производить в точности так же, как мы вычисляли и исследовали слагаемые формул (3,7). Но при этом следует иметь в виду, что [при выполнении условий (16,4)] для функций, входящих в выражения  $Q_s$  и  $T_s$ , кроме (4,7) и (5,7), оказываются справедливыми следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{C}{\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} &= \frac{2(1+\zeta^2)}{(2+\zeta^2)^2 \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} \times \\ \times \frac{1+O(|\beta^2|)}{\zeta^2(\zeta^2-\zeta_1^2)} - \frac{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}{(2+\zeta^2)^2} \frac{1+O(|\beta^2|)}{\zeta^2(\zeta^2-\zeta_2^2)}, \end{aligned} \right\} (35,7)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{D}{\sqrt{1+\zeta^2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \Delta_0(k, \zeta)} = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} \times \\
 & \times \left[ \frac{1 + O(|\beta^2|)}{hk \zeta^2 \sqrt{1+\zeta^2} (\zeta^2 - \zeta_2^2)} - \frac{hk \sqrt{1+\zeta^2} (1 + O(|\beta^2|))}{4 \zeta^2 (\zeta^2 - \zeta_1^2)} \right], \quad (35_{1,7}) \\
 & \left[ \frac{2+\zeta^2}{2(1+\zeta^2)} \chi(k \sqrt{1+\zeta^2}) - \chi(k \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}) \right] = \\
 & = hk \left[ \frac{2+\zeta^2}{2(1+\zeta^2)} \sqrt{1+\zeta^2} - \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} \right] + O(|\beta^2|), \\
 & \left[ \frac{2+\zeta^2}{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}} \chi(k \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}) - \frac{\chi(k \sqrt{1+\zeta^2})}{\sqrt{1+\zeta^2}} \right] = \\
 & = hk \frac{\zeta^2}{2} - \frac{h^2 k^2}{2} \left[ \frac{2+\zeta^2}{2} \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} - \sqrt{1+\zeta^2} \right] + O(|\beta^3|); \quad (35_{2,7}) \\
 & F_1 = hk \frac{1+\gamma^2\zeta^2}{2+\zeta^2} \cdot \frac{bc(k, \omega)}{k \left( \zeta - i \frac{b \omega}{k} \right)} [1 + O(|\beta|)], \\
 & F_2 = \frac{bc(k, \omega)}{k \left( \zeta - i \frac{b \omega}{k} \right)} \left[ 1 - \frac{hk \zeta^2}{4 \sqrt{1+\zeta^2}} + O(|\beta^2|) \right], \quad (35_{3,7}) \\
 & \frac{e^{-(h-z)k\sqrt{1+\zeta^2}} - e^{-zk\sqrt{1+\zeta^2}}}{\sqrt{1+\zeta^2}} = (2z-h)k + \\
 & + [(z-h)^2 - z^2] k^2 \sqrt{1+\zeta^2} + O(|\beta^2|) \\
 & \dots \dots \dots \\
 & 2 - e^{-(h-z)k\sqrt{1+\zeta^2}} - e^{-zh\sqrt{1+\zeta^2}} = hk \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2} + \\
 & + O(|\beta^2|). \quad (35_{4,7})
 \end{aligned}$$

Построим окружность  $(c_0)$ , с центром в начале координат, и с положительным направлением обхода, охватывающую участок мнимой оси с точками  $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, i, \frac{i}{\gamma}$  и не содержащую внутри себя других корней характеристического уравнения. Тогда суммы первых трех, а также последних слагаемых из (34,7) представятся интегралами

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_0)} (\Theta + \Theta_2 + \Theta_3) e^{k \frac{i}{b} \zeta} d\zeta, \\
 & \frac{1}{2\pi i} \int_{(c_0)} (T + T_2 + T_3) e^{k \frac{i}{b} \zeta} d\zeta, \quad (36,7)
 \end{aligned}$$

в которых функции  $\Theta$ ,  $T$ ,  $\Theta_2$ ,  $T_2$  и  $\Theta_3$ ,  $T_3$  имеют значения, соответственно, из (19,5), (16<sub>2</sub>,5) и (16<sub>3</sub>,5).

Для приближенного вычисления интегралов (36,7) следует обратиться к формулам (4,7), (5,7), а также к формулам (35,7) и произвести выкладки, вполне аналогичные выкладкам п. 2 § 7.

Выполняя (хотя и не сложные, но довольно громоздкие) вычисления и сравнивая получающиеся результаты с суммами  $(U_0 + U_1 + U_2)$  и  $(W_0 + W_1 + W_2)$  выражений<sup>1</sup> (8,7), (10,7) и (11,7), приходим к выводу, что в точках срединной плоскости слоя первый интеграл (36,7) оказывается весьма малым и имеющим значение не выше следующего порядка величины  $hk_1(U_0 + U_1 + U_2)$ . Величина же второго интеграла (36,7) не оказывается малой, а с точностью до величины второго порядка малости относительно  $hk_1$  и  $\omega bh$  совпадает со значением суммы  $(W_0 + W_1 + W_2)$ . (Этого, конечно, и следовало ожидать заранее.)

Обращаясь к оценке четвертых слагаемых в формулах (36,7), представляющихся суммами вычетов подинтегральных функций (21,5) во всех „больших“ корнях характеристического уравнения, мы сразу же убеждаемся в том, что эта оценка может быть выполнена в точности так же, как выполнялась оценка четвертых слагаемых из (3,7) в п. 4 § 7. При этом оказывается, что получающиеся в нашем случае результаты вполне совпадают с результатами, полученными ранее для случая поверхностного воздействия.

Таким образом, мы приходим к выводу, что при возбуждении упругого слоя равномерно распределенной по сечению нормальной силой, заданной плотностью (1,2), удовлетворяющей условиям (16,4), составляющие поля смещений в точках срединной плоскости слоя представятся следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} |u_s| &\leq O[hk_1 u_0(x, t)], \\ w_s &= w_0(x, t) \left\{ 1 + O\left[ hk_1 (hb \omega)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} (37,7)$$

Из этих формул вытекает, что факт равномерности распределения нормальной силы по сечению слоя сказывается лишь

<sup>1</sup> Упомянутые суммы определяют приближенные значения интегралов (6,7), в которые переходят интегралы (36,7) в случае поверхностного воздействия на слой.

в том отношении, что продольные колебания слоя возбуждаются с весьма незначительной (а, может быть, в точках срединной плоскости и с нулевой<sup>1</sup>) интенсивностью.

До сих пор мы предполагали, что силовое воздействие (1,2) удовлетворяет условиям (16,4). Теперь возникает вопрос: что будет происходить со слоем в случае невыполнения указанных условий? Ответ можно получить совершенно таким же образом, как это делалось в п. 4 § 7 при рассмотрении случая нормального поверхностного воздействия на упругий слой. Получающиеся же при таком рассмотрении результаты и выводы вполне совпадают с выводами, сформулированными в п. 4 § 7.

### § 8. Уравнения теории тонких пластин

В настоящем параграфе будем считать, что в задачах из п.п. 2 и 3 § 5 на поверхность упругого слоя действует нормальная сила, плотность которой определяется формулами (6,4) и (12,4). Объемная же плотность (1,2) силы, приложенной к элементам слоя в задаче § 2 или п. 4 § 5, будет подчинена соотношению (11,4). При этом во всем нижеизложенном предполагается, что величины  $k_1$  и  $\omega_0$ , определяющие пределы интегрирования в (6,4) и (12,4), удовлетворяют неравенствам (16,4).

1. При исследовании составляющих поля смещений в точках срединной плоскости слоя в задаче п. 2 § 5, а также упомянутых составляющих в задачах п.п. 3 и 4. § 5 мы видели, что главными частями смещений являются выражения (19,7), содержащие функции  $S_0$  и  $R_0$  из (15,7) и (16,7). Но в § 7 предполагалось, что нормальное воздействие на упругий слой определяется формулами типа (6,4) и (1,7). Теперь же заменяем формулу (1,7) формулой (12,4). Поэтому в выражениях  $u_0$  и  $w_0$  главных частей смещений необходимо добавить интегрирование по переменной  $\omega$ , что приводит нас к следующим формулам:

$$u_0(x, t) = \frac{A}{b\mu} \int_0^{k_1} dk \int_{-\omega_0}^{\omega_0} kc(k, \omega) \sin kx d\omega \times$$

<sup>1</sup> Вопрос об интенсивности продольных колебаний мы не выяснили в полной мере, так как ограничивались рассмотрением лишь приближенных формул.

$$\times \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{k^2 \frac{q}{\rho_0} - \omega^2} - \frac{e^{ik\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} t}}{2\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} k \left( k\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} - \omega \right)} - \frac{e^{-ik\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} z}}{2\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} k \left( k\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} + \omega \right)} \right\}, \quad (1,8)$$

$$\omega_0(x, t) = \frac{1}{h\rho_0} \int_0^{k_1} dk \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega p^2 c(k, \omega) \cos kx \times$$

$$\times \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{k^4 - p^2\omega^2} - \frac{e^{i\frac{k^2}{p} t}}{2k^2(k^2 - p\omega)} - \frac{e^{-i\frac{k^2}{p} t}}{2k^2(k^2 + p\omega)} \right\}.$$

Заметим, что в последних формулах постоянная  $A$  имеет значение

$$A = \frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)b}, \quad (18,7)$$

величины  $p$  и  $q$  определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{b}{h} \sqrt{\frac{3}{1-\gamma^2}} \left[ 1 - \left( \frac{9}{10} - \frac{2}{3}\gamma^2 \right) \frac{h^2 k^2}{4} + \dots \right]^{-1}, \\ q &= \rho_0 \frac{4(1-\gamma^2)}{b^2} \left\{ 1 - \frac{h^2 k^2}{12} [1 - 4\gamma^2(1-\gamma^2)] + \dots \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (12,7)$$

а  $c(k, \omega)$  является произвольной непрерывной функцией своих аргументов.

Не представляет труда установить вид уравнений, решениями которых являются функции (1,8). Действительно, рассмотрим функцию  $\omega_0(x, t)$  и предположим сперва, что величина  $p$  в (1,8) имеет постоянное значение, равное

$$p = p_0 = \frac{b}{h} \sqrt{\frac{3}{1-\gamma^2}} = \sqrt{\frac{3\rho_0(\lambda+2\mu)}{h^2\mu(\lambda+\mu)}} \quad (2,8)$$

основному члену первой формулы (12,7). Тогда простое сравнение убеждает нас в совпадении последней формулы с формулой (2,4), а также — в полном тождестве между второй формулой (1,8) и формулами (7,4) и (13,4). Послед-

ние же, как мы видели в § 4, определяют подчиненное нулевым начальным условиям решение уравнения (3,4) при произвольно заданной его правой части.

Поэтому можем утверждать, что при выполнении (2,8) вторая функция (1,8) в точности является решением задачи классической теории тонких пластин, определяемой уравнением (3,4) и нулевыми начальными данными.

Предположим теперь, что (2,8) не имеет места, а величина  $p$  определяется из (12,7) с учетом первого поправочного члена, т. е.

$$p = p_0 + p_1 h^2 k^2, \quad (3,8)$$

где  $p_0$  имеет значение из (2,8) или (2,4), а  $p_1$  равно

$$p_1 = \frac{p_0}{4} \left( \frac{9}{10} - \frac{2}{3} \gamma^2 \right). \quad (4,8)$$

(Следует отметить, что учет поправочных слагаемых в выражении  $p$  может оказаться необходимым при сравнительно больших значениях времени  $t$ .)

Вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2p_0 p_1 h^2 = \frac{3p_0(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \left[ \frac{9}{10} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right]^2, \\ x_2 &= p_1^2 h^4 = \frac{3p_0(\lambda + 2\mu) h^2}{16\mu(\lambda + \mu)} \left[ \frac{9}{10} - \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right]^2, \end{aligned} \right\} \quad (5,8)$$

убеждаемся в том, что  $w_0(x, t)$  из (1,8) является решением (удовлетворяющим нулевым начальным данным) дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - x_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + x_2 \frac{\partial^6 w_0}{\partial x^4 \partial t^2} + p_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \frac{p_0^3}{p_0 h} \tilde{F}(x, t), \quad (6,8)$$

в котором функция  $\tilde{F}$  в правой части выражается через плотность  $F(x, t)$  силы (6,4) по формуле

$$\tilde{F}(x, t) = F(x, t) - \frac{x_1}{p_0^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{x_2}{p_0^2} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4}. \quad (7,8)$$

Существенно подчеркнуть, что в силу произвола в выборе функции  $c(k, \omega)$  редукция от решения (1,8) к дифференциальному уравнению (7,8) является операцией вполне однозначной.

Обратимся теперь к первой функции (1,8). Полагая в этой формуле

$$q = q_0 = \rho_0 \frac{4(1-\nu^2)}{b^2} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \quad (8,8)$$

основному члену второй формулы (12,7) и пользуясь производом в выборе непрерывной функции  $c(k, \omega)$ , мы легко убеждаемся в том, что функция  $u_0(x, t)$  является (удовлетворяющим нулевым начальным данным) решением волнового уравнения

$$q_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\rho_0 A}{b\mu} \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}, \quad (9,8)$$

в котором функция  $F(x, t)$  имеет значение из (6,4). Последнее уравнение в точности совпадает с уравнением колебаний удлинения (в случае плоской задачи) теории тонких пластин.

Подобно изложенному, можно было бы определить и поправочные члены к уравнению (9,8). Мы не будем этого делать потому, что в теории тонких пластин колебания удлинения имеют лишь второстепенное значение.

2. Если учесть результаты исследований §§ 3 и 4 и предположить, что на упругий слой действует осесимметрическая сила  $F(\rho, t)$ , представляющаяся формулами (14,4) и удовлетворяющая условиям типа (16,4), то на основании оценок § 7 можем утверждать, что в случае осевой симметрии главные части смещений (в точках срединной плоскости слоя) представляются следующими формулами:

$$u_0(\rho, t) = \frac{A}{b\mu} \int_0^{k_1} dk \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega kc(k, \omega) J_1(k\rho) \times \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{k^2 \frac{q}{\rho_0} - \omega^2} - \frac{e^{ik\sqrt{\frac{q}{\rho_0}}t}}{2\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} k \left(k\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} - \omega\right)} - \frac{e^{-ik\sqrt{\frac{q}{\rho_0}}t}}{2\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} k \left(k\sqrt{\frac{q}{\rho_0}} + \omega\right)} \right\}, \quad (10,8)$$

$$\begin{aligned}
 w_0(\rho, t) = & \frac{1}{h \rho_0} \int_0^{k_1} dk \int_{-\omega_0}^{\omega_0} d\omega p^2 c(k, \omega) J_0(k, \rho) \times \\
 & \times \left\{ \frac{e^{i\omega t}}{k^4 - p^2 \omega^2} - \frac{e^{i \frac{k^2}{p} t}}{2k^2(k^2 - p\omega)} - \right. \\
 & \left. - \frac{e^{-i \frac{k^2}{p} t}}{2k^2(k^2 + p\omega)} \right\} \quad (10,8)
 \end{aligned}$$

Не представляет труда проверить, простым дифференцированием, что в предположении (8,8) функция  $u_0(\rho, t)$  является (удовлетворяющим нулевым начальным данным) решением следующего уравнения:

$$q_0 \text{grad div } u_0 \overset{\rightarrow}{\rho_1} - \rho_0 \frac{\partial^2 u_0 \overset{\rightarrow}{\rho_1}}{\partial t^2} = \frac{\rho_0 A}{b\mu} \text{grad } F(\rho, t).$$

Последнее же является уравнением колебаний удлинения теории тонких пластин в задачах с осевой симметрией. В общем же случае уравнение колебаний удлинения имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 q_0 \text{grad div } \mathbf{u}_{\text{прод.}} \overset{\rightarrow}{\rho_1} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u}_{\text{прод.}} \overset{\rightarrow}{\rho_1} - \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{\text{прод.}} \overset{\rightarrow}{\rho_1}}{\partial t^2} = \\
 = \frac{\rho_0 A}{b\mu} \text{grad } F.
 \end{aligned}$$

Аналогичные же результаты получаем и для поперечной составляющей поля смещений.

Действительно, дифференцирование второй формулы (10,8) убеждает нас в том, что если величина  $p$  имеет постоянное значение (2,8), то  $w_0(\rho, t)$  из (10,8) оказывается (удовлетворяющим нулевым начальным данным) решением уравнения (4,4). Последнее же является уравнением колебаний изгиба классической теории тонких пластин в случае задач с осевой симметрией.

Наконец, если учитывать зависимость величины  $p$  от волнового числа  $k$  формулы (3,8), то можно усмотреть, что

Функция  $w_0(\rho, t)$  из (10,8) оказывается решением более сложного уравнения

$$\Delta \Delta w_0 - \kappa_1 \frac{\partial^2 \Delta w_0}{\partial t^2} + \kappa_2 \frac{\partial^2 \Delta \Delta w_0}{\partial t^2} + p_0^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \frac{p_0^2}{\rho_0 h} \tilde{F}(\rho, t), \quad (11,8)$$

в котором  $p_0$  и  $\kappa$  имеют значения, соответственно, из (2,8) и (5,8), функция  $\tilde{F}(\rho, t)$  определяется следующей формулой

$$\tilde{F}(\rho, t) = F(\rho, t) - \frac{\kappa_1}{p_0^2} \Delta F(\rho, t) + \frac{\kappa_2}{p_0^2} \Delta \Delta F(\rho, t). \quad (12,8)$$

Уравнение (11,8) является обобщением (на случай осевой симметрии) уравнения (6,8), которое мы получали в случае плоской задачи для слоя.<sup>1</sup>

3. Теперь уместно снова возвратиться к формулам (32,7) (или же к таким же в точности формулам в случае осевой симметрии) и обсудить вопрос о смысле условий (16,4), а также вопрос о гипотезах теории колебаний тонких пластин и о границах применимости этих гипотез. При этом, вследствие большего значения (как для теории, так и для практики) колебаний изгиба, мы ограничимся рассмотрением лишь вертикальной составляющей поля смещений.

При выводе классических уравнений колебания изгиба тонких пластин делают следующие фундаментальные предположения:

1) Под действием нагрузки всякая прямая линия, проведенная в пластине, бывшая перпендикулярной к срединной плоскости пластины в невозмущенном состоянии, остается прямой, перпендикулярной к изогнутой срединной поверхности пластины.

2) Под действием нагрузки элементы срединной поверхности не испытывают растяжений.

3) Потенциальная энергия  $V$  деформации пластины является однородной квадратичной функцией главных кривизн срединной поверхности, а именно

$$V = \frac{\rho_0}{2p_0^2} \iint_{(P)} \left[ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{r_1 r_2} \right] dx dy,$$

<sup>1</sup> Следует подчеркнуть, что уравнение (11,8), равно как и уравнение (6,8), существенно не совпадает с „исправленными“ уравнениями теории тонких пластин<sup>[6;7]</sup>. На сравнении упомянутых уравнений с нашими уравнениями (6,8) и (11,8) не будем останавливаться.

где  $\rho_0$  — объемная плотность материала пластины,  $r_1$  — главные радиусы кривизны срединной поверхности,  $p_0$  — коэффициент, имеющий значение (2,4). При этом интегрирование совершается по области, занимаемой срединной плоскостью невозмущенной пластины.

Если исходить из выражения потенциальной энергии  $V$  и воспользоваться вариационным принципом Гамильтона, то в случае малых колебаний пластин (которые мы сейчас только и рассматриваем) для вертикального смещения  $w_0$  сразу же получается уравнение (3,4). Но мы видели ранее, что решение уравнения (3,4) является в первом приближении главной частью вертикальной составляющей смещения  $w$  в пластине далеко не всегда, а только в том случае, если выполнены неравенства (17,4) и (18,4), вытекающие из (16,4). Поэтому последние неравенства следует рассматривать как условия, устанавливающие границы применимости гипотез классической теории колебаний тонких пластин.

Итак, гипотезы классической теории колебаний пластин приближенно соответствуют действительности только в том случае, если внешняя нормальная нагрузка „плавно“ распределена по поверхности пластины [в смысле неравенства (17,4)] и представляется функциями, изменяющимися со временем „медленно“ [в смысле неравенства (18,4)].

В предыдущем уже упоминалось о распространенном взгляде на уравнения колебания теории тонких пластин, заключающемся в том, что решения этих уравнений могут быть получены из строгих решений уравнений теории упругости путем простого усреднения (по толщине пластины) составляющих вектора упругих смещений. Основываясь на предыдущих наших исследованиях, мы должны считать такую точку зрения ошибочной.

Усредненные по толщине слоя смещения удовлетворяют уравнениям теории тонких пластин только в том случае, если оказываются выполненными условия (17,4) и (18,4) или, что то же, — условия (16,4).

Если же условия (16,4) не выполнены, то для описания поля смещений  $u$ , усредненного по толщине слоя, мы должны, строго говоря, решать уравнения теории упругости, а затем производить усреднение. Сказанное может быть иллюстрировано на примере задачи о колебаниях слоя под действием импульсного плоского сосредоточенного воздействия. Действительно, если на граничную поверхность слоя действует нормальная сила вида  $F = \delta(t)\delta(x)$ , то в слое начинает распространяться последовательность поверхностей

разрывов, определяемых теорией характеристик, смещения на которых обращаются в бесконечность подобно тому, как обращается в бесконечность функция (при целом числе  $n$ )

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{если } c^2 t^2 - x^2 - (z - nh)^2 < 0, \\ [c^2 t^2 - x^2 - (z - nh)^2]^{-\frac{1}{2}}, & \text{если } c^2 t^2 - x^2 - (z - nh)^2 \geq 0. \end{cases}$$

При увеличении времени  $t$  и возрастании расстояния  $x$ , на которое распространилась в слое волна, поверхности фронтов будут приближаться к плоскостям, перпендикулярным к образующим слоя. Поэтому без труда можно убедиться в том, что при небольших изменениях переменной  $x$  в окрестности упомянутых плоскостей усредненное по толщине слоя поле смещений будет изменяться весьма быстро, вследствие чего указанные плоскости будут играть важную роль в описании свойств усредненного поля. Законы же распространения плоскостей, к которым приближаются характеристические поверхности возмущения, могут быть установлены лишь на основании рассмотрения точных уравнений теории упругости и совершенно не учитываются уравнения теории тонких пластин.

Наконец, полученные нами в предыдущем параграфе результаты позволяют полностью выяснить вопрос о влиянии равномерности распределения по сечению слоя нормальной нагрузки. Мы можем теперь утверждать, что одного лишь факта равномерности распределения нормальной нагрузки [без выполнения условий (16,4)] совершенно недостаточно для того, чтобы из точных уравнений теории упругости (и их решений) вытекали бы, с известной степенью приближения, уравнения теории колебаний тонких пластин (и их решения). Если же условия (16,4) выполнены и силовое воздействие равномерно распределено по сечению слоя, то главная часть вертикальной составляющей смещения (в точках срединной плоскости слоя) удовлетворяет уравнениям теории колебаний тонких пластин, а горизонтальная составляющая смещения почти вовсе (или просто вовсе) не возбуждается.

### § 9. Заключение

Основное содержание нашей работы сводилось к выяснению условий, при выполнении которых из точных уравнений теории упругости вытекают уравнения классической

теории колебаний тонких пластин, а также — к получению поправочных членов в классических уравнениях. При этом мы всегда рассматривали лишь пластины, безгранично простирающиеся по всем направлениям. Представляется, что при современном состоянии методов математической физики едва ли возможно обобщить наши результаты на случай ограниченных пластин и едва ли можно надеяться получить „обоснование“ краевых условий, обычно применяемых в теории тонких пластин. Однако если не сомневаться в правильности вида упомянутых условий, то на основании наших результатов следует прийти к заключению, что и в теории колебаний ограниченных тонких пластин должны применяться уравнения, полученные нами в § 8. Но при этом внешняя нагрузка обязательно должна удовлетворять условиям типа (17,4) и (18,4). Если же последние условия не имеют места, то модель „тонкой пластины“ следует считать неприменимой к описанию явлений, происходящих в реальной пластине, колебания которой изучаются. Решение последней задачи о колебаниях нужно вести методами математической теории упругости.

Необходимо отметить, что классические уравнения колебаний тонких пластин уже давно стали подвергаться критике и уже давно начались попытки<sup>[6]</sup> „исправления“ этих уравнений. Недостатки классических уравнений усматривали в том, что получающиеся из этих уравнений частоты собственных колебаний пластин плохо согласуются с опытными данными (особенно в случае высоких частот, т. е. в случае „быстрых“ гармонических движений<sup>1</sup>), а также в том, что классические уравнения принадлежат к параболическому типу и не дают конечной скорости распространения возмущений вдоль пластины. Попытки устранения упомянутых недостатков, производившиеся путем учета инерции вращения элементов пластины при деформации, а также путем учета влияния перерезывающих сил на прогиб, приводили к уравнениям гиперболического типа, характеризующимся двумя скоростями распространения волн вдоль пластины<sup>[7]</sup>.

Сравнение с опытными данными следствий, вытекающих из „исправленных“ уравнений, производилось лишь на базе задач о собственных колебаниях пластин (а также стержней). Результаты такого сравнения показывали, что „исправленные“ уравнения приводят к частотам колебаний, лучше совпадающим с опытом, чем в классической теории. Это

<sup>1</sup> Когда условия (18,4) оказываются особенно сильно нарушенными.

обстоятельство рассматривалось как некоторый аргумент в пользу „исправленных“ уравнений.<sup>1</sup> Значительно более сомнительным аргументом в пользу „исправленных“ уравнений теории колебаний тонких пластин является то обстоятельство, что из этих уравнений вытекает существование двух скоростей распространения возмущений в пластине. Дело заключается в том, что упомянутые скорости

$$v_1 = \sqrt{\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\rho(\lambda + 2\mu)}} \quad \text{и} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{3\rho}}$$

из скоростей распространения возмущений в слое, получаемых путем решения строгих уравнений теории упругости.<sup>2</sup> Если же решить по методам математической теории упругости задачу о колебаниях бесконечной пластины, вызванных действующим единичной сосредоточенной силы, и произвести сравнение полученных результатов с результатами, вытекающими из „исправленных“ уравнений колебаний тонких пластин<sup>[7]</sup>, то можно сразу же убедиться в полном несовпадении полученных в обоих случаях физических следствий. Такой результат, конечно, следовало бы ожидать и заранее.

Мы не будем дольше задерживаться на рассмотрении работ по „исправлению“ классических уравнений колебаний тонких пластин, а сделаем лишь ряд заключительных замечаний, в которых резюмируем нашу точку зрения на рассматриваемый вопрос.

1. Мы признаем, что понятие „тонкая пластина“ приобретает смысл только в том случае, если указана величина, с которой производится сравнение толщины  $h$  пластины. Но нам представляется несостоятельным обычно производимое сравнение толщины  $h$  с величиной  $l$ , характеризующей линейные размеры пластины. Дело в том, что при выполнении неравенства  $h \ll l$  и при исследовании (в сравнительно небольшие моменты времени  $t$ ) возмущения в пластине, вызванного действием сосредоточенных нормальных сил, явления отражения от „боковых“ границ пластины можно вовсе не учитывать (так как возмущение еще не

<sup>1</sup> Полезно отметить, что стремление получить лучшее совпадение с опытом в задачах на собственные колебания стержней явилось исходным пунктом в рассуждениях С. П. Тимошенко в его основной по рассматриваемым вопросам работе<sup>[6]</sup>.

<sup>2</sup> Полезно отметить, что скорость  $v_1$  всегда заключается в пределах  $v_{\text{поп.}} < v_1 < v_{\text{прод.}}$ . Скорость же  $v_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} v_{\text{поп.}} < v_{\text{Релея}}$ .

дошло до границы). Поэтому для рассматриваемых моментов времени приведенное неравенство не может выражать условия малости толщины пластины. Кроме же сказанного, легко можно было бы убедиться в том, что (несмотря на неравенство  $h \ll l$ ) появляющееся при предыдущем воздействии поле смещений удовлетворяет лишь точным уравнениям теории упругости, а вовсе не уравнениям теории тонких пластин.

Мы считаем, что понятие „тонкая пластина“ может употребляться лишь в связи с условиями (17,4) и (18,4). Таким образом, понятие „тонкая пластина“ не имеет абсолютного смысла, а оказывается существенно зависящим от характера внешнего воздействия на пластину.

2. Нам представляется несомненным, что как классические, так и „исправленные“ уравнения теории колебаний тонких пластин не могут применяться в случае произвольных нормальных воздействий на пластину. Необходимыми и достаточными условиями применимости теории тонких пластин являются неравенства типа (17,4) и (18,4). При этом уравнения колебаний теории тонких пластин должны иметь вид, указанный в § 8 настоящей работы.

3. Мы утверждаем, что для обоснования уравнений колебаний тонких пластин совершенно недостаточно операции усреднения по толщине пластины истинного поля смещений. Также совершенно недостаточным является факт равномерности распределения нормальной силы по толщине пластины.

4. Наконец, мы считаем, что было бы интересно произвести сравнение с опытом результатов вычисления частот собственных колебаний пластин, полученных на основании наших уравнений из § 8. (Мы такого сравнения не производили, хотя оно могло быть выполнено без труда.) Не предпринимая окончательных результатов такого сравнения, скажем, что естественно было бы ожидать лучшего совпадения с опытом, нежели в классической теории колебаний пластин.

Но утверждать с несомненностью справедливость выказанного предположения, едва ли возможно заранее, так как во всех наших предыдущих исследованиях не учитывалось влияние граничных условий (теории тонких пластин) на характер возмущений, возникающих в пластине. Упомянутое же влияние могло бы оказаться решающим в задачах на собственные колебания.

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Г. Петрашень. Двухмерная задача Лемба для бесконечного упругого слоя, ограниченного параллельными плоскостями. ДАН СССР, т. LXIV, № 6, 1949.
  - [2] К. И. Огурцов, Г. И. Петрашень. Динамические задачи для полупространства в случае осевой симметрии. (Этот же сборник, стр. 3).
  - [3] Rayleigh. Proc. Math. Soc. London, v. 20, pp. 225—234, 1889.
  - [4] Lamb. Proc. Roy. Soc. London (A) v. 93, pp. 114—128, 1916/17.
  - [5] Н. В. Гоголадзе. Труды Сейсмол. инст., № 119, 1947.
  - [6] С. П. Тимошенко. Теория колебаний в инженерном деле. 1932.
  - [7] Я. С. Уфлянд. Прикладная математика и механика, т. XII, 1948.
-

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

<p>К. И. ОГУРЦОВ, Г. И. ПЕТРАШЕНЬ. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ                      ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИМ-                      МЕТРИИ . . . . .</p>	3
<p><i>Глава I. Точные решения некоторых задач для полупро-                      странства . . . . .</i></p>	6
<p>§ 1. Колебания полупространства под действием единичной                      включенной нормальной силы и под действием единичного                      нормального импульса . . . . .</p>	6
<p>§ 2. Колебания полупространства под действием внутренних                      источников возмущений . . . . .</p>	19
<p><i>Глава II. Общие исследования построенных решений . . . . .</i></p>	32
<p>§ 3. Качественное исследование решения задачи о полупро-                      странстве при граничной включенной единичной силе . . . . .</p>	33
<p>§ 4. Граничное воздействие типа импульса . . . . .</p>	63
<p>§ 5. Об исследовании решений при внутренних источниках                      возмущений . . . . .</p>	77
<p>§ 6. О количественных исследованиях поля упругих смещений</p>	81
<p><i>Глава III Асимптотические методы исследования решений за-                      дач о полупространстве . . . . .</i></p>	94
<p>§ 7. Исследование решения задачи при сосредоточенном гра-                      ничном воздействии (10,1) . . . . .</p>	97
<p>§ 8. Задача об изменении интенсивностей падающих волн при                      отражении от границы упругого полупространства . . . . .</p>	111
<p>Г. И. ПЕТРАШЕНЬ. КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА,                      ПОКРЫТОГО СЛОЕМ ЖИДКОСТИ . . . . .</p>	118
<p>§ 1. О построении точного решения задачи . . . . .</p>	119
<p>§ 2. Асимптотическое исследование построенных решений . . . . .</p>	126
<p>§ 3. Дополнения . . . . .</p>	157
<p>§ 4. Заключение . . . . .</p>	168
<p>Г. И. ПЕТРАШЕНЬ. К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛАСТИН . . . . .</p>	172
<p>§ 1. Колебания упругого слоя под действием плоской поверхно-                      стной силы . . . . .</p>	173
<p>§ 2. Колебания упругого слоя под действием равномерно рас-                      пределенной по сечению нормальной силы . . . . .</p>	180
<p>§ 3. Колебания упругого слоя под действием осесимметрической                      поверхностной силы . . . . .</p>	191
<p>§ 4. Идея сопоставления решений с решениями уравнений теор-                      ии тонких пластин . . . . .</p>	195

	Стр.
§ 5. Вспомогательные преобразования и формулы . . . . .	201
§ 6. О корнях характеристического уравнения . . . . .	210
§ 7. Исследование решений задач о слое в случае медленно изменяющихся плавно распределенных нормальных воздействий . . . . .	217
§ 8. Уравнения теории тонких пластин . . . . .	238
§ 9. Заключение . . . . .	245

---

М-29094 Подписано к печати 1/VI 1951 г. Печ. л. 15¼ Уч.-изд.-л. 14,9  
Бумага 60×92<sup>1</sup>/<sub>16</sub> Тираж 1000 экз. + 25 отд. отт. Цена 12 руб. Зак. 304

Тип. Гизлегпрома, Ленинград, Садовая ул., 55/57

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка или формула	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
52 и 54	(38,3) 5 сверху (39,3) 4 сверху	$\frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{t}{b}\lambda - z\sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \rho^2}}$	$\frac{d\lambda}{\sqrt{\left(\frac{t}{b}\lambda + z\sqrt{\lambda^2 - 1}\right)^2 - \rho^2}}$	Автора
65	(12,4)	$] J_1(k\rho)$	$] kJ_1(k\rho)$	"
66	(12,4)	$] J_0(k\rho)$	$] kJ_0(k\rho)$	"
99	(7,7)	$\sqrt{1 + \gamma^2 - \zeta^2}$	$\sqrt{1 + \gamma^2 \zeta^2}$	"
209	(20,5)	$U_s(x, z, t) \dots$ $W_s(x, z, t)$	$u_s(x, z, t) \dots$ $w_s(x, z, t) \dots$	Издат. "
221	(9,7)	$\dots - \frac{(1 - \gamma^2)(2 - \tau^2)}{(\tau_2^2 - \tau_1^2)}$	$\dots - \frac{(1 - \gamma^2)(2 - \tau_0^2)}{(\tau_2^2 - \tau_1^2)}$	Автора
232	1 снизу	$\dots e^{it \left[ \frac{\pi}{\gamma bh} + Bh^2 \tau^3 + O(h^3 \tau^3) \right]}$	$\dots e^{it \left[ \frac{\pi}{\gamma bh} + Bh^2 k^3 + O(h^3 k^3) \right]}$	Издат.

12 руб.

Новая цена

7 руб. 20 к.

1-20  
140694/х'98

Издательство

Ленинградского Государственного ордена Ленина  
Университета имени А. А. Жданова

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ КНИГИ

по астрономии

Ученые записки № 116, серия математических наук, вып. 18.  
Труды астрономической обсерватории, т. 13, 1949, 253 стр.  
Цена 16 руб.

Ученые записки № 132, серия математических наук, вып. 20.  
Труды астрономической обсерватории, т. 14. Солнечные затмения  
21-IX 1941 г. и 9-VII 1945 г., 184 стр. Цена 14 руб.

Ученые записки № 136, серия математических наук, вып. 22.  
Труды астрономической обсерватории, т. 15, 1950, 233 стр.  
Цена 15 руб.

Труды юбилейной научной сессии, секция математических  
наук, подсекция астрономии, 1948, 60 стр. Цена 5 руб.

Н. Н. Сытинская. Абсолютная фотометрия протяженных  
небесных объектов, 1948, 198 стр. Цена 12 руб.

В. В. Соболев. Движущиеся оболочки звезд. 1947, 114 стр.  
Цена 7 руб.

по математике и механике

Ученые записки № 91, серия физико-математических наук,  
вып. 14, 1948, 169 стр. Цена 13 руб.

Ученые записки № 96, серия математических наук, вып. 15,  
1948, 196 стр. Цена 13 руб.

Ученые записки № 111, серия математических наук, вып. 16,  
1949, 219 стр. Цена 15 руб.

Ученые записки № 114, серия математических наук, вып. 17  
(механика), 1949, 259 стр. Цена 15 руб.

Ученые записки № 135, серия математических наук, вып. 21  
(механика), 1950, 203 стр. Цена 12 руб.

Ученые записки № 137, серия математических наук, вып. 19,  
1950, 221 стр. Цена 15 руб.

С. Л. Соболев, акад. Некоторые применения функциональ-  
ного анализа в математической физике, 1950, 255 стр.  
Цена 16 руб.

С заказами обращаться по адресу:

Ленинград, Университетская наб., 7/9

Книги высылаются наложенным платежом